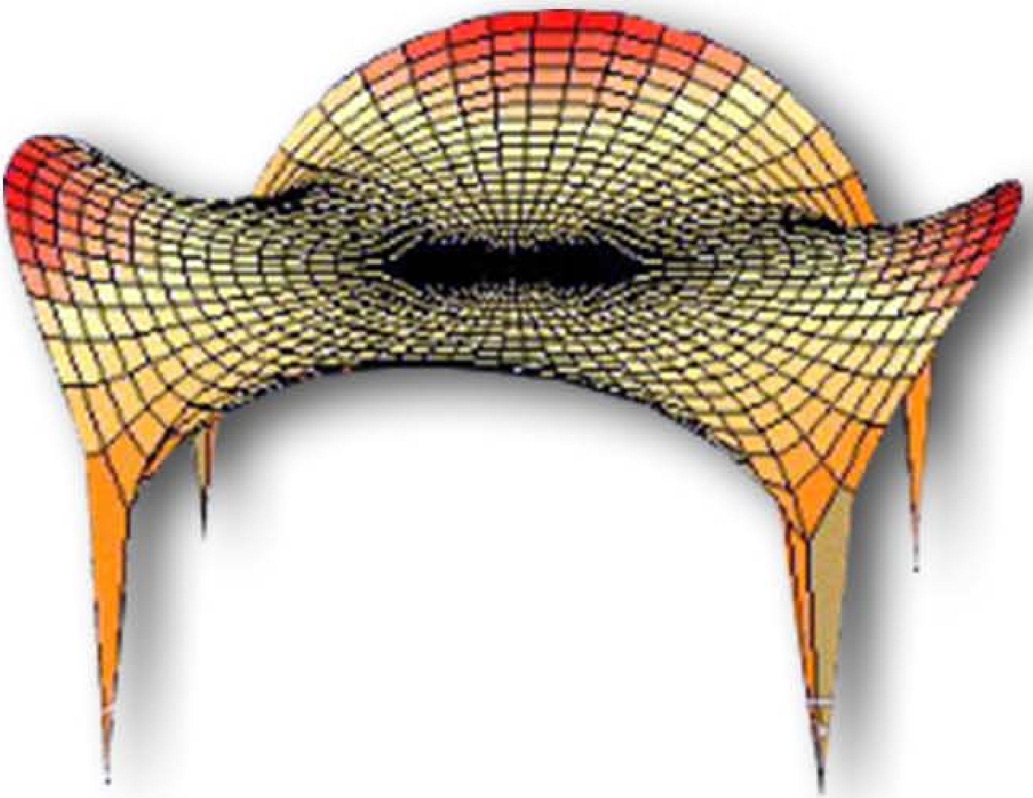
# 关于Smarandache理论及其有关问题

王 妤 苏娟丽 张 瑾 著



High American Press
2008

# 关于 Smarandache 理论
# 及其有关问题

**王　妤**

西北大学数学系

**苏娟丽**

杨凌职业技术学院

**张 瑾**

西安师范学校

***High American Press***

**2008**

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

Books on Demand
ProQuest Information & Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road
P.O. Box 1346, Ann Arbor
MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/basic

**Peer Reviewers**:

Wenpeng Zhang , Department of Mathmatics, Northwest University , Xi'an ,Shaanxi, P.R. China.
Wenguang Zhai, Department of Mathmatics, Shangdong Teachers' University, Jinan, Shangdong, P.R. China.
Guodong Liu, Department of Mathmatics, Huizhou University, Huizhou ,Guangdong , P.R.China.



Many books can be downloaded from the following **Digital Library of Science**:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

**ISBN: 978-1-59973-075-2**

**Standard Address Number**: 297-5092
**Printed in the United States of America**

# 前 言

数论这门学科最初是从研究整数开始的, 所以叫做整数论. 后来整数论又进一步发展, 就叫做数论了. 确切的说, 数论就是一门研究整数性质的学科. 在我国, 数论也是发展最早的数学分支之一. 许多著名的数学著作中都有关于数论内容的论述, 比如求最大公约数、勾股数组、某些不定方程整数解的问题等等· · ·

数论在数学中的地位是独特的, 高斯曾经说过“数学是科学的皇后，而数论是数学的皇后”. 毫无疑问, 数论是数学中最优美的学科, 希尔伯特的传记作者在谈到他放下代数不变量理论而转向数论研究时说,“数论以一种不可抗拒的魅力, 吸引着数学中的精华”· · ·

初等数论所包含的一个重要内容是研究数论函数的各种性质, 而Smarandache函数在初等数论中又占据着重要而特殊的地位. 许多数论专家对Smarandache问题表现出极大的兴趣并对其进行了深入的研究. 例如,《Comments and Topics On Smarandache Notions and Problems》一书中, Kenichiro Kashihara 博士提出了许多与Smarandache函数相关的数论问题, 同时也介绍了有关方面的研究进展, 其中不少问题具有一定的研究价值. 对这些问题进行研究并给予一定程度上的解决, 是具有重要理论意义和理论应用研究价值的.

本书是作者在西北大学攻读硕士学位期间, 根据导师张文鹏教授的建议, 将目前中国学者关于Smarandache问题的部分研究成果, 以及Kenichiro Kashihara博士和其他学者提出的新问题汇编成册, 其主要目的在于向读者介绍关于Smarandache问题的一些最新的研究成果, 并提出了关于Smarandache函数的新问题, 有兴趣的读者可以对这些问题进行研究, 从而开拓读者的视野, 引导和激发更多读者对这些领域的研究兴趣, 推动有关领域研究工作的发展.

最后对我们的导师张文鹏教授的热情鼓励, 详细地审阅全书并提出许多宝贵意见致以深深的谢意!

编者

2008年10月

# 目录

# 第一章 Smarandache函数的问题及其新进展

## 1.1 引言

当自变量$n$在某个整数集合中取值时, 因变量$y$取复数值的函数$y = f(n)$称为数论函数或算术函数. 由于许多数论或组合数学中的问题均可化为一些数论函数来讨论, 所以数论函数是一类非常重要的函数, 是数论中的一个重要研究课题, 是研究各种数论问题中不可缺少的工具. 本章主要是在Florentin Smaradache思想的基础上提出了与Smarandache函数相关的一些问题, 并加以注解, 以便于有兴趣的读者进一步研究.

## 1.2 Smarandache非构造序列

**定义1.1:** 序列$1, 23, 456, 7891, 23456, 789123, 4567891, 23456789, \cdots$, 易见该序列每一项中的各个数位都有从数$1, 2, \ldots, 9$ 中任选其一的可能, 且第$n$项有$n$个数字.

**问题1.1:** 序列中第$n$项数的末位数字是什么?

**结论:** 我们很容易证明该序列第$n$项数的末位数字是如下数列:

$$1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 9, 9, 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 9, 9, 1, \ldots.$$

**问题1.2:** 该序列中第$n$项数的首位数字是什么?

**结论:** 因为第$n$项有$n$个数, 因此第$n$项数的首位数字可以由$\dfrac{n(n+1)}{2} \pmod 9$来决定.

**问题1.3:** 该序列中存在多少个素数?

## 1.3 Smarandache数字和

**定义1.2:** 给定任意一个整数$n \geq 0$, $d_s(n)$是整数$n$的各个数位的数字之和. 该序列的前几项为:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, \ldots.$$

**问题1.4:** 根据整数$n$确定$d_s(n)$的表达式是什么?

**结论:** 解决该问题的关键是考虑若$n = 10k, k \in N$,

$$d_s(n), d_s(n+1), \ldots, d_s(n+9)$$

则构成了公差为1的算术级数. 因此所求表达式为

$$d_s(n) = d_s\left(10\left[\frac{n}{10}\right]\right) + n - 10 \times \left[\frac{n}{10}\right],$$

其中$\left[\frac{n}{10}\right]$表示不超过$\frac{n}{10}$的最大正整数.

## 1.4 Smarandache数字乘积

**定义1.3:** 给定任意一个整数$n \geq 0$, $d_p(n)$是整数$n$的各个数位的数字乘积. 该数列的前几项为:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 2, 4, 6, 8 \ldots.$$

**问题1.5:** 根据整数$n$确定$d_p(n)$的表达式是什么?

**结论:** 解决该问题的关键是注意到若$n = 10k, k \in N$, 则$d_p(n) = 0$, 且$d_p(n+1), \ldots, d_s(n+9))$是一个算术级数. 它们的公差是所有数位上的数字乘积的差. 故所求表达式为

$$d_p(n) = d_p\left(\left[\frac{n}{10}\right]\right) \times \left(n - 10 \cdot \left[\frac{n}{10}\right]\right),$$

其中$\left[\frac{n}{10}\right]$表示不超过$\frac{n}{10}$的最大正整数.

## 1.5 Smarandache Pierced链

**定义1.4:** 若整数$n \geq 1$, 则

$$c(n) = 101 \times (10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^{4n} + 1).$$

它的前几项是:

$$101, 1010101, 10101010101, 101010101010101, \cdots.$$

**问题1.6:** Smarandache提出了这样的问题: 在数列$\frac{c(n)}{101}$中存在多少个素数?

**结论:** 首先对其进行因式分解, 则有

$$10^{4n} - 1 = (10^4 - 1)(10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \ldots + 10^4 + 1) = (10^4 - 1) \times \frac{c(n)}{101}$$

和

$$10^{4n} - 1 = (10^{2n} + 1)(10^{2n} - 1) = (10^{2n} + 1)(10^n + 1)(10^n - 1).$$

下面我们分情况讨论:

(a) 当$n > 2$时, 若$\frac{c(n)}{101}$是素数, 则它必是$(10^{2n} + 1)$或$(10^{2n} - 1)$的一个因子. 但当$n > 2$时, $10^{4n} - 1$小于$10^{2n} + 1$和$10^{2n} - 1$, 从而得出矛盾.

(b) 当$n = 1$和$n = 2$时, 通过检验得出$\frac{c(1)}{101} = 1$和$\frac{c(2)}{101} = 10001 = 73 \times 137$.

因此, 序列$\frac{c(n)}{101}$中不存在素数.

**问题1.7:** 当$n \geq 2$时, $\frac{c(n)}{101}$ 是否为无平方因子数?

**注:** 该问题已被荀素和李江华[17]用初等方法完全解决(参见文献[4]), 具体的说就是下面的:

**定理1.1:** 有无穷多个正整数$n$使得$\frac{c(n)}{101}$ 不是无平方因子数.

**证明:** 首先我们定义$k$-free数: 设$k \geq 2$是给定的正整数. 对于任意正整数$n > 1$, 我们称$n$是$k$-free数, 如果对于任意素数$p$满足$p|n$, 那么$p^k \dagger n$. 我们称2-free数为无平方因子数; 3-free数为立方因子数. 现在我们直接证明定理. 很显然

$$10 \equiv 1 (\bmod 9).$$

如果$a \equiv b(\bmod m)$, 那么$a^n \equiv b^n(\bmod m)$ 对于每一个正整数$n$ , 我们有

$$10^{4n-4} \equiv 1 (\bmod 9),$$
$$10^{4n-8} \equiv 1 (\bmod 9),$$
$$\cdots\cdots$$
$$10^{4n} \equiv 1 (\bmod 9).$$

显然

$$1 \equiv 1 (\bmod 9).$$

因此,

$$\frac{c(n)}{101} = 10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^4 + 1 \equiv n (\bmod 9).$$

故当$n = 9k$时有

$$\frac{c(n)}{101} \equiv 10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^4 + 1 \equiv n \equiv 0 (\bmod 9).$$

由无平方因子数的定义和以上性质我们可得当$9|n$, $\frac{c(n)}{101}$不是无平方因子数.

这就完成了定理的证明.

## 1.6 Smarandache因子乘积

**定义1.5:** 对于任意的整数$n \geq 1$, $P_d(n)$是$n$的所有正因子的乘积, 即$P_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$, $d(n)$表示$n$的所有正因子的个数. 当$n = 1, 2, 3, 4, \cdots$时, 我们有

$$P_d(n) = 1, 2, 3, 8, 5, 36, 7, 64, 27, 100, 11, 1728, 13, 196, \ldots.$$

**问题1.8:** $P_d$是否含有无穷多个素数?

**结论:** 若$p$为素数,则$P_d(p)=p$, 故$P_d(n)$含有无穷多个素数.

**问题1.9:** 若$p$为素数, $P_d$是否含有无穷多个形如$p^k$ $(k=1,2,\cdots)$这样的数?

**结论:** 若$p$为素数, $n=p^m$, 则$n$的因子都是形如$p^k$这样的数且它们的乘积也是$p^k$的形式, 其中$k=1,2,\cdots$.

**问题1.10:** 找出使$P_d(n)=n$的所有的数$n$.

**结论:** 易知若$n$是复合数, 则有$P_d(n)>n$, 故使得$P_d(n)=n$的数$n$为$1\bigcup p$, 其中$p$为任意素数.

**问题1.11:** 是否存在素数$p$使得$p^4\in P_d$或$p^5\in P_d$?

**结论:** 设$p$为任意素数. 若$n$含有一个素因子$q\neq p$, 则$q\mid P_d$, 从而$n$不是所求. 因此所有可能的解只能是素数$p$的方幂形式. 易见若$n=p^k$, 此时$n$的因子为

$$p,p^2,p^3,\cdots,p^k,$$

且它们的乘积中$p$的指数为整数1到$k$之和,即$\dfrac{k(k+1)}{2}$. 故对该问题我们可以得到对一个素数$p$, 若$p^m\in P_d$当且仅当存在整数$k$使得$\dfrac{k(k+1)}{2}=m$. 易证当$m=4,5$时这样的$k$不存在.

## 1.7 Smarandache真因子乘积

**定义1.6:** 对于任意的整数$n\geq 1$, $p_d(n)$是除$n$之外$n$的所有正因子的乘积. 特别, $p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}-1}$. 当$n=1,2,3,4,\cdots$时, 我们有

$$p_d(n)=1,1,1,2,1,6,1,8,3,10,1,144,1,14,15,64,\ldots.$$

**问题1.12:** 是否存在无穷多个整数$n$使得$p_d(n)=1$?

**结论:** 若$p$为素数, 则$p_d(p)=p$, 故存在无穷多个整数$n$使得$p_d(n)=1$.

**问题1.13:** 对任意的正整数$n$, 方程

$$p_d(n) = n \tag{1-1}$$

的所有解为$n = p^3$或$n = pq$, 其中$p, q$为素数.

**结论:** (i) 若$n = p^m$满足(1-1)式时, 我们有

$$p_d(p^m) = \prod_{k=1}^{m-1} p^k = p^{\frac{m(m-1)}{2}} = p^m,$$

即

$$\frac{m(m-1)}{2} = m,$$

故$m = 3$.

(ii) 若$n = pq$, 易见$p_d(pq) = pq$.

(iii) 现在我们讨论$n$的其它形式. 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解式.

当$k \geq 2$且$\alpha_2 > 1$时我们有

$$p_d(n) > p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2 - 1}) > n.$$

当$k > 2$时, 易知

$$p_d(n) > p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) > n.$$

综上讨论可知方程(1-1)的解为$n = p^3$, $pq$, 其中$p, q$为不同素数.

**定义1.7:** 使得$p_d(n) = n$的数也被称为Smarandache亲和数.

## 1.8 Smarandache平方补数

**定义1.8:** 对任意正整数$n \geq 1$, $n$的Smarandache平方补数$SSC(n)$是使$nk$为完全平方数的最小正整数$k$. 这个数列的前几项为:

$$1, 2, 3, 1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1, 17, 2, 19, \ldots.$$

Smarandache指出该序列是无平方因子数集, 这是很容易证明的.

**问题1.14:** Smarandache平方补数序列是所有无平方因子数的集合, 且这个集合中的每一个元素出现无限多次.

**结论:** 假设$k$是$n$的平方补数, 若$k = k_1 p^r$, 其中$p$是素数, $r$是偶数, 则$k_1 n$是$n$的平方补数, 这与$k$的最小性矛盾. 若$k = k_1 p^r$, 其中$r \geq 3$且为偶数, 则$k_1 p^{r-2} n$也为$n$的平方补数, 与$k$的最小性矛盾. 因此, $k$不含有比1大的素数的方幂.

若$k$是$n$的平方补数, 则$k$是所有形如$p^2 nk$数的平方补数, 其中$p$是素数且$p \nmid n$, $p \nmid k$.

## 1.9 Smarandache立方补数

**定义1.9:** 对任意整数$n \geq 1$, $n$的Smarandache立方补数$SCC(n)$为使得$kn$是完全立方数的最小正整数$k$. 这个数列的前几个元素为:

$$1, 4, 9, 2, 25, 36, 49, 1, 3, 100, 121, 18, 169, 196, 225, \ldots.$$

Smarandache指出该序列是无立方因子数集, 且该序列中的每一个数都出现无穷次.

**问题1.15:** 证明$SCC$为无立方数的集合且在该数列中的每一个数都出现无穷多次.

**结论:** 设$k$是$n$的立方补数, $k = k_1 p^s$, 其中$s \geq 3$, 则$k_1 p^{s-3}$是一个完全立方补数, 与$k$的最小性矛盾. 若$k$是$n$的立方补数, 则$k$是所有形如$p^3 nk$数的立方补数, 其中$p$是素数且$p \nmid n$, $p \nmid k$.

## 1.10 Smarandache广义剩余序列

**定义1.10:** $(x + c_1) \times \cdots \times (x + c_{F_{(m)}})$是模$m$的一个完全剩余系, 其中$m = 2, 3, 4, \cdots, x \in N$, 对$c_i$而言, $1 \leq i \leq F(m)$, $F$是欧拉函数.

这是一个多项式问题, 前几个值可以计算出来:

$$m = 2, x + 1 \equiv x - 1 (\bmod\ 2),$$

$$m = 3, x^2 + 3x + 2 \equiv x^2 - 1 (\bmod\ 3),$$

$$m=4, x+3\equiv x-1 \pmod 4,$$
$$m=5, x^4+10x^3+35x^2+50x+24\equiv x^4-1 \pmod 5,$$
$$m=6, x^2+6x+5\equiv x^2-1 \pmod 6.$$

**问题1.16:** 证明: $(x+c_1)\times\cdots\times(x+c_{F_{(m)}})\equiv x^{F(m)}-1 \pmod m$.

**结论:** 若$(c_i,m)=1$, 则$(m-c_i)=1$, 故$(m-c_i)$为数$c_1$到$c_{F_{(m)}}$之一. 若$(x,m)=1$, 根据费马欧拉定理，我们有

$$x^{F(m)}-1\equiv 0 \pmod m. \tag{1-2}$$

另一方面

$$(x+c_1)\times\cdots\times(x+c_{F_{(m)}})\equiv 0 \pmod m. \tag{1-3}$$

用(1-2)减(1-3)我们得到一个$F(m)$-1级渐近公式. 故对于$c_1$到$c_{F(m)}$, 我们必须解决问题

$$A_1x^{F(m)-1}+A_2x^{F(m)-2}+\cdots+A_{F(m)-1}x+A_{F(m)}\equiv 0 \pmod m.$$

通过真值表计算我们有

$$A_1=A_2=\cdots=A_{F(m)-1}\equiv 0 \pmod m,$$

故该同余式成立.

## 1.11 Smarandache素数列

Smarandache素数列有两种类型, 即就是下面的:

**定义1.11:** 对任意的整数$n\geq 1$, Smarandache上素数列$P_p(n)$为大于或等于$n$的最小素数. 该数列的前几项为:

$$2,2,3,5,5,7,7,11,11,11,11,13,13,17,17,17,17,19,19,\cdots.$$

**定义1.12:** 对任意的整数$n\geq 2$, Smarandache下素数列$p_p(n)$为小于或等于$n$的最大素数. 该数列的前几项为:

$$2,2,3,5,5,7,7,7,7,11,11,13,13,13,13,17,17,\cdots.$$

通过定义我们可以直接看出当$n\geq 2$时有$p_p(n)\leq P_p(n)$.

**问题1.17:** 是否存在无穷多个正整数$n$使得$p_p(n)=P_p(n)$.

**结论:** 若$p$是素数, 则有$p_p(n)=p=P_p(n)$.

**问题1.18:** 首先我们给出两个定义如下:

**定义1.13:** $I_n=\{p_p(2)+p_p(3)+\cdots+p_p(n)\}/n$.

**定义1.14:** $S_n=\{P_p(2)+P_p(3)+\cdots+P_p(n)\}/n$.

**问题1.18.1:** 确定$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-I_n)$的极限.

**问题1.18.2:** 确定$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{I_n}$的极限.

对于问题1.18.2, 阎晓霞[18]已经对其进行了研究, 即下面的:

**定理1.2:** 对任意的正整数$n>1$, 我们有渐近公式

$$\frac{S_n}{I_n}=1+O\left(n^{-\frac{1}{3}}\right).$$

**推论1.1:** 由定理1.2我们有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{I_n}=1.$$

在证明之前她先给出了三个引理:

**引理1.1:** 对任意的实数$x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{p_{n+1}\leq x}(p_{n+1}-p_n)^2\ll x^{\frac{23}{18}+\varepsilon},$$

其中$p_n$是第$n$个素数, $\varepsilon$是任意给定的正整数.

**证明:** 见参考文献[12]和[13]

**引理1.2:** 令$x$为足够大的正实数, 则存在一个素数$P$介于$x$和$x+x^{\frac{2}{3}}$之间.

**证明:** 对任意一个足够大的实数$x$, 令$P_n$ 是$P_n \leq x$的最大素数. 则根据引理1.1我们立即得到

$$(P_n - P_{n-1})^2 \ll x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}$$

或

$$P_n - P_{n-1} \ll x^{\frac{2}{3}}.$$

故在$x$ 和$x + x^{\frac{2}{3}}$之间存在一个素数$p$. 引理1.2的证明完成.

**引理1.3:** 对任意的实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} P_p(n) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right) \tag{1-4}$$

和

$$\sum_{n \leq x} p_p(n) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right). \tag{1-5}$$

**证明:** 我们首先证明(1-4), 同理可以证明(1-5). 令$P_k$ 是第$k$ 个素数. 则根据$P_p(n)$的定义我们知道对任意固定的素数$P_r$, 存在$P_{r+1} - P_r$ 正整数$n$ 使得$P_p(n) = P_r$. 故我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} P_p(n) &= \sum_{P_{n+1} \leq x} P_n \cdot (P_{n+1} - P_n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{P_{n+1} \leq x} \left(P_{n+1}^2 - P_n^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{P_{n+1} \leq x} (P_{n+1} - P_n)^2 \\
&= \frac{1}{2} P^2(x) - 2 - \frac{1}{2} \sum_{P_{n+1} \leq x} (P_{n+1} - P_n)^2, \qquad (1\text{-}6)
\end{aligned}$$

其中$P(x)$ 是使得$P(x) \leq x$的最大素数.

根据引理1.2我们知道

$$P(x) = x + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right). \tag{1-7}$$

依据(1-6), (1-7) 和引理1.1我们立即得到

$$\sum_{n \leq x} P_p(n) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right) + O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right).$$

这就证明(1-4).

又因

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} p_p(n) &= \sum_{P_n\leq x} P_n\cdot(P_n-P_{n-1})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{P_n\leq x}\left(P_n^2-P_{n-1}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{p_n\leq x}(P_n-P_{n-1})^2\\ &= \frac{1}{2}P^2(x)+\frac{1}{2}\sum_{P_n\leq x}(P_n-P_{n-1})^2,\end{aligned}$$

则由引理1.1, 引理1.2和上式, (1-5)得证. 下面给出定理的证明:

**证明:** 对任意的正整数$n>1$, 根据引理1.3和$I_n$ 及$S_n$的定义我们有

$$\begin{aligned}I_n=\{p_p(2)+p_p(3)+\cdots+p_p(n)\}/n &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}n^2+O\left(n^{\frac{5}{3}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)\end{aligned}\tag{1-8}$$

和

$$\begin{aligned}S_n=\{P_p(2)+P_p(3)+\cdots+P_p(n)\}/n &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}n^2+O\left(n^{\frac{5}{3}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right).\end{aligned}\tag{1-9}$$

结合(1-8)及(1-9) 有

$$\frac{S_n}{I_n}=\frac{\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)}{\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)}=1+O\left(n^{\frac{-1}{3}}\right).$$

即该问题完全解决.

但对Smarandache素数列的研究远不止于此, 它与素数分布问题还有着密切的联系. 例如下面提出的猜想:

我们先给出Smarandache素数列构成的行列式的定义:

**定义1.15:** 对任意正整数$n$, 设$c(n)$和$C(n)$为$n\times n$行列式, 即

$$c(n)=\begin{vmatrix} p_p(2) & p_p(3) & \cdots & p_p(n+1) \\ p_p(n+2) & p_p(n+3) & \cdots & p_p(2n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_p(n(n-1)+2) & p_p(n(n-1)+3) & \cdots & p_p(n^2+1) \end{vmatrix}$$

$$C(n)=\begin{vmatrix} P_p(1) & P_p(2) & \cdots & P_p(n) \\ P_p(n+1) & P_p(n+3) & \cdots & P_p(2n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_p(n(n-1)+1) & P_p(n(n-1)+2) & \cdots & P_p(n^2) \end{vmatrix}$$

它们的前几个值为:

$$c(2)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1; c(3)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}=14;$$

$$c(4)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 11 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 17 \end{vmatrix}=0; c(5)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 11 \\ 11 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 17 & 17 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 23 & 23 & 23 & 23 \end{vmatrix}=-96.$$

$$C(2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=4; C(3)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 11 & 11 \end{vmatrix}=4;$$

$$C(4)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 13 \\ 13 & 17 & 17 & 17 \end{vmatrix}=188; C(5)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 13 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 19 & 19 & 23 \\ 23 & 23 & 23 & 29 & 29 \end{vmatrix}=-1424.$$

对于上述行列式, 张文鹏教授提出了下面两个猜测:

**猜想1.1:** 对任意合数$n \geq 6$, 有$c(n) = 0$ 及$C(n) = 0$.

**猜想1.2:** 对任意素数$q$, 有$c(q) \neq 0$ 及$C(q) \neq 0$.

从它们的前几个值我们也不难发现以上两个猜测是正确的, 因此余亚辉和蔡立翔对猜想1.1进行了研究, 并证明了(这一结果将在《纯粹数学与应用数学》上发表):

对任意合数$n \geq 6$, 有$c(n) = 0$及$C(n) = 0$.

对于猜想1.2, 若它成立, 那么通过行列式的计算可以给出正整数是否为素数的一个新的判别方法. 建议有兴趣的读者与我们一起探讨!

## 1.12 Smarandache平方列

Smarandache平方列有两种类型, 即就是下面的:

**定义1.16:** 对任意正整数$n$, Smarandache最小平方列SISP$(n)$ 定义为小于或等于$n$的最大平方数. 它的前几个值为:

$$0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, \cdots .$$

**定义1.17:** 对任意正整数$n$, Smarandache最大平方列SSSP$(n)$ 定义为大于或等于$n$的最小平方数. 它的前几个值为:

$$0, 1, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, \cdots .$$

根据定义我们很容易得出对任意的正整数$n$, 有SISP$(n) \leq$ SSSP$(n)$.

**问题1.19:** 求方程SISP$(n) =$ SSSP$(n)$的所有正整数解.

**证明:** 若$n$是完全平方数, 则有SISP$(n) =$ SSSP$(n)$.
若$n$不是完全平方数, 我们有SISP$(n) < n <$ SSSP$(n)$.

**问题1.20:** 我们首先给出如下两个定义:

**定义1.18:**

$$S_n = \{\text{SSSP}\,(1) + \text{SSSP}\,(2) + \cdots + \text{SSSP}\,(n)\}/n.$$

**定义1.19:**

$$I_n = \{\mathrm{SISP}\,(1) + \mathrm{SISP}\,(2) + \cdots + \mathrm{SISP}\,(n)\}/n.$$

**问题1.20.1:** 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - I_n)$的值.

**问题1.20.2:** 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{I_n}$的值.

**问题1.21:** 我们先定义两个新的函数:

**定义1.20:**

$$s_n = \sqrt[n]{\mathrm{SSSP}\,(1) + \mathrm{SSSP}\,(2) + \cdots \mathrm{SSSP}\,(n)}.$$

**定义1.21**

$$i_n = \sqrt[n]{\mathrm{SISP}\,(1) + \mathrm{SISP}\,(2) + \cdots \mathrm{SISP}\,(n)}.$$

**问题1.21.1:** 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(s_n - i_n)$的值.

**问题1.21.2:** 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{i_n}$的值.

**注:** 荀素用初等方法对问题1.20.2和问题1.21进行了研究, 得出下面的结论(该结论将在《纯粹数学与应用数学》上发表):

(a) 对于任意实数$x > 2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SSSP}\,(n) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right); \tag{1-10}$$

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{SISP}\,(n) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right). \tag{1-11}$$

由(1-10)和(1-11)我们立刻得到下面的:

(b) 对任意正整数$n$, 有渐近式

$$\frac{S_n}{I_n} = 1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

及极限式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{I_n} = 1.$$

(c) 对任意正整数$n$, 有渐近式

$$\frac{s_n}{i_n} = 1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

及极限式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{i_n} = 1, \lim_{n\to\infty} (s_n - i_n) = 0.$$

对问题1.20.1, 似乎还没有人研究, 有兴趣的读者可以对其进行探讨!

## 1.13 Smarandache素数可加补数

**定义1.22:** 对任意正整数$n$, 素数可加补函数SPAC($n$) 为满足$n+k$是素数的最小正整数$k$. 该数列的前几项为:

$$1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 5, 4, 3, 2, \cdots.$$

Smarandache曾经提出是否存在任意大的奇数$k$使得$k, k-1, k-2, k-3, \cdots, 2, 1, 0$包含在该序列中.

**问题1.22:** *是否存在任意大的偶数$k$使得$k,\ k-1,\ k-2,\ k-3,\ \cdots,\ 2,\ 1,\ 0$包含在该序列中.*

**注:** 郭艳春[19]研究并完全解决了上述问题，即下面的:

**定理1.3:** *存在任意大的正整数$k$, 使得*

$$k, k-1, k-2, k-3, \cdots, 2, 1, 0$$

包含于SPAC($n$).

**证明:** 令$k$为任意大的正整数, 且$n > k+1$. 假设$p$是使得$p > n!+n$的最小素数. 很显然$p-1, p-2, \cdots, p-K, \cdots, n!+n, \cdots, n!+2$,都是合数. 现在我们考虑$k+1$个正整数:

$$p-k, p-k+1, p-k+2, \cdots, p-1, p.$$

这些数的 Smarandache素数可加补数分别是

$$\begin{aligned}&\mathrm{SPAC}(p-k)=k,\ \mathrm{SPAC}(p-k-1)=k-1,\ \cdots,\\&\mathrm{SPAC}(p-1)=1,\ \mathrm{SPAC}(p)=0.\end{aligned}$$

注意到$k, k-1, k-2, \cdots, 1, 0$全部包含于数列SPAC($n$)中, 这就完成了定理的证明.

**定义1.23:**

$$A_n = \{\mathrm{SPAC}(1)+\mathrm{SPAC}(2)+\cdots+\mathrm{SPAC}(n)\}/n.$$

**问题1.23:** 估计$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$

**猜想1.3:** 数列$\{A_n\}$发散.

**注:** 郭艳春和路玉麟[20]证明了该猜想是正确的, 即:

**定理1.4:** 对任意正整数$n$, 有估计式

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a) \geq \frac{1}{2}\ln n + \mathrm{O}\left(1\right).$$

为了完成定理的证明, 需要引入以下两个简单引理:

**引理1.4:** 设$n$为任意正整数, 则当$n$较大时在区间$[n-n^{\frac{7}{12}}, n]$及$[n, n+n^{\frac{7}{12}}]$中一定包含一个素数. 即就是存在素数$p$及$q$使得

$$n-n^{\frac{7}{12}} \leq p \leq n$$

及

$$n < q \leq n+n^{\frac{7}{12}}.$$

**证明:** 参阅文献[12]及[13].

**引理1.5** 设$\pi(x)$表示不超过$x$的所有素数的个数, 则有渐近公式

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

**证明:** 参阅文献[5]及[7].

下面我们来完成定理的证明.

**证明:** 首先对任意充分大的正整数$n$, 设 $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_m \leq n$表示区间[1, $n$]中的所有素数. 于是由SPAC($a$)的定义可知在区间($p_i$, $p_{i+1}$]中所有整数$a$的素数可加补数之和为

$$\begin{aligned}\sum_{p_i<a\leq p_{i+1}} \mathrm{SPAC}(a) &= p_{i+1}-p_i-1+p_{i+1}-p_i-2+\cdots+1+0\\ &= \frac{(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)}{2}.\end{aligned}$$

注意到SPAC(1) = 1, 所以由上式可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\leq n}\mathrm{SPAC}(a) &= 1+\sum_{p_{i+1}\leq n}\sum_{p_i<a\leq p_{i+1}}\mathrm{SPAC}(a)+\sum_{p_m<a\leq n}\mathrm{SPAC}(a)\\ &\geq \sum_{p_{i+1}\leq n}\frac{(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)^2-\frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)^2-\frac{1}{2}(p_m-2). \qquad (1\text{-}12)\end{aligned}$$

应用柯西不等式有

$$\begin{aligned}p_m-2 &= \sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)\leq\left[\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p_{i+1}\leq n}1\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left[\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\pi(n))^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

从而可得不等式

$$\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2 \ge \frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)}.$$

由此及(1-12)式并注意$A_n$的定义可得

$$nA_n \ge \frac{1}{2}\frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)} - \frac{1}{2}(p_m-2) = \frac{1}{2}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right]$$

或者

$$A_n \ge \frac{1}{2n}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right].$$

应用引理1.4及引理1.5并注意估计式 $n-p_m \ll n^{\frac{7}{12}}$ 立刻推出

$$\begin{aligned} A_n &\ge \frac{\left[n+\mathrm{O}\left(n^{\frac{7}{12}}\right)\right]^2}{2n\left[\frac{n}{\ln n}+\mathrm{O}\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)\right]} + O\left(\frac{p_m}{n}\right) \\ &= \frac{n^2+\mathrm{O}\left(n^{\frac{19}{12}}\right)}{\frac{2n^2}{\ln n}+\mathrm{O}\left(\frac{n^2}{\ln^2 n}\right)} + O(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \mathrm{O}(1). \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln n+\mathrm{O}(1)\right] = +\infty,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty.$$

从而$A_n$是发散的. 于是完成了定理的证明.

**定义1.24:** 对正整数$n$, 最小的素数可加补数为满足$n+k$是素数, 且$|k|$为最小的数$k$. 它的前几项为:

$$1, 0, 0, \pm1, 0, \pm1, 0, -1, \pm2, 1, 0, \pm1, 0, -1, \pm2, \cdots$$

我们很容易发现在这个数列中有许多数重复了无穷多次.

**问题1.24:** 研究这个数列的性质.

**注:** 若我们考虑$\pm k$是$+k$和$-k$这两项, 则当$n$趋于无穷大时该数列的平均值趋于零.

## 1.14 Smarandache函数$S(n)$

**定义1.25:** 对任意正整数$n$, $S(n)$为使得$n|m!$的最小正整数$m$. 该数列的前几项为:

$$0, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 4, 6, 5, 11, 4, 13, 7, 5, 6, 17, 6, 19, 5, 7, \cdots.$$

它也称为Smarandache函数且在第二章中会再次提到. 该序列是值得研究的, 如果你想更多的研究它, 可以阅读相关的Smarandache文献或参考C.Ashbacher所做的相关工作.

**问题1.25:** 研究Dirichlet级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n^s}$.

**问题1.26:** 是否存在这样的数$m$使得当$k>5$时

$$S(m) < S(m+1) < \cdots < S(m+k),$$

或者

$$S(m) > S(m+1) > \cdots > S(m+k).$$

**问题1.27:** 找出同余式

$$1^{S(n-1)} + 2^{S(n-1)} + \cdots + (n-1)^{S(n-1)} + 1 \equiv 0 (\bmod\ n)$$

的所有正整数解.

**注:** 秦玮[21]用初等方法研究了该同余式的所有素数解, 具体的说就是下面的:

**定理1.5:** 设$n$为素数, 则$n$满足同余方程

$$1^{S(n-1)} + 2^{S(n-1)} + \cdots + (n-1)^{S(n-1)} + 1 \equiv 0 (\bmod\ n) \tag{1-13}$$

当且仅当$n=2,3,5$.

**证明:** (1) 若$n=2$, 因为$2|(1^{S(1)}+1)$, 故$n=2$是方程(1-13)的解.

(2) 若$n=3$, 因为$3|(1^{S(2)}+2^{S(2)}+1)=6$, 因此$n=3$ 是方程(1-13)的解.

(3) 若$n=5$, 因为$5|(1^{S(4)}+2^{S(4)}+3^{S(4)}+4^{S(4)}+1)=355$, 故$n=5$是方程(1-13)的解.

(4) 若素数$n=p\geq 7$, 显然$p$至少有一个原根. 设$g$是$p$的原根, 也就是说, 当$1\leq i\leq p-2$时, $(g^i-1,p)=1$, 且对所有的正整数$m$, 我们有同余式

$$g^{p-1}\equiv 1(\bmod p) \text{ 和 } g^{m(p-1)}\equiv 1(\bmod p) \tag{1-14}$$

根据模$p$的原根性质易知$g^0$, $g^1$, $\cdots$, $g^{p-2}$是构成了模$p$的一个简化剩余系. 于是我们有

$$\begin{aligned}
&1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}\\
&\equiv g^{0\cdot S(p-1)}+g^{1\cdot S(p-1)}+\cdots+g^{(p-2)\cdot S(p-1)}\\
&\equiv \frac{g^{(p-1)\cdot S(p-1)}-1}{g^{S(p-1)}-1}(\bmod p).
\end{aligned} \tag{1-15}$$

易知素数$p\geq 7$时, 我们有$S(p-1)\leq p-2$, 故$(g^{S(p-1)}-1,p)=1$. 又由(1-14)和(1-15)可得

$$1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}\equiv \frac{g^{(p-1)\cdot S(p-1)}-1}{g^{S(p-1)}-1}(\bmod p).$$

根据上述讨论我们有

$$1^{S(n-1)}+2^{S(n-1)}+\cdots+(n-1)^{S(n-1)}+1\equiv 1(\bmod n).$$

因此, 若素数$p\geq 7$时, 方程(1-13)无解. 即完成了定理的证明.

针对问题1.28, 武楠又研究了下面的同余方程

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0(\bmod n),$$

并得出以下结论(该结论将发表于《西北大学学报》):

(a) 对任意正整数$n>1$, 当$\mu(n)\neq 0$时我们有同余式

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv\frac{n}{4}\left(1+(-1)^n\right)(\bmod n),$$

其中$\mu(n)$为Möbius函数.

(b) 设奇数$n>1$且标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $S(n)$=$S(p_j^{\alpha_j})$=$\alpha p_j$. 则$n$满足此同余方程的充分条件是对所有$i=1,2,\cdots,k$, 有$\phi(p_i^{\alpha_i})\nmid \alpha p_j$.

结合(a)和(b)我们不难推出该同余方程没有偶数解, 且由(a)我们立刻得到:

(c) 对任意奇数$n>1$且$\mu(n)\neq 0$, 我们有同余式：

$$1^{S(n)}+2^{S(n)}+3^{S(n)}+\cdots+(n-1)^{S(n)}\equiv 0(\bmod n).$$

**问题1.28:** 找出方程

$$\frac{1}{S(a)^2}+\frac{1}{S(b)^2}=\frac{1}{S(c)^2}\tag{1-16}$$

的所有正整数解.

**注:** 蔡立翔[22]利用最大公因数和勾股数的性质解决了该问题, 即证明了下面的:

**定理1.6:** 方程(1-16)有无穷多个正整数解. 且($a$, $b$, $c$)满足上述方程当且仅当$S^2(a)+S^2(b)=z^2$, 即$S(a)$, $S(b)$, $z$ 是勾股三角数, 且$GCD(S(a),\ S(b))=d>1$, $z\mid d^2$, $S(c)=\dfrac{xy}{|z|}$, 其中$GCD(S(a),\ S(b))$是$S(a)$和$S(b)$的最大公因数.

首先她给出了一个引理:

**引理1.6:** 对任意的正整数$m$, 方程$S(n)=m$有正整数解.

**证明:** 根据$S(n)$的定义和参考文献[8]我们立即可得到该引理.

下面我们用引理1.6对定理1.6进行证明. 为了方便, 我们令$S(a)$为$x$, $S(b)$为$y$, $S(c)$为$w$. 则方程(1-16)变为

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{w^2}.\tag{1-17}$$

**证明：** 当$S(a)$, $S(b)$, $S(c)$之中有一个为1时, $(a,\ b,\ c)$不满足方程(1-16). 不失一般性, 我们假设$x\geq 2$, $y\geq 2$, $w\geq 2$. 很明显方程(1-16)与方程(1-17)同解.故我们只考虑方程(1-17)的解. 由方程(1-16)我们有

$$x^2y^2=(x^2+y^2)w^2 \tag{1-18}$$

和

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=w^2. \tag{1-19}$$

假设方程(1-16)有正整数解, 则存在$x,\ y,\ w$ 满足方程(1-18). 注意到$x\geq 2$, $y\geq 2$, $w\geq 2$, 由方程(1-18)我们得到$x^2+y^2$是完全平方数, 换句话说, 即存在一个正整数$z$使得$x^2+y^2=z^2$, 从而$x,\ y,\ z$是勾股数. 故

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2=w^2. \tag{1-20}$$

假设$GCD(x,\ y)=d$, 则方程(1-20)中$GCD(x,\ y)=GCD(x,\ z)=GCD(y,\ z)=d$. 设$x=dx'$, $y=dy'$, $z=dz'$, 则有

$$\left(\frac{dx'y'}{z'}\right)^2=w^2, \tag{1-21}$$

在方程(1-21)中, $w$是整数, 则有$z'\mid dx'y'$. 因$GCD(x',z')$=$GCD(y',z')=1$及$GCD(x'y',z')=1$, 于是我们得到$z'\mid d$及$d\geq z'>2$. 又因$z=dz'$, $z\mid d^2$, 根据方程(1-20)我们有$w=\dfrac{xy}{z}$ .

于是, 我们得到了方程(1-17)的正整数解, 且它们满足$x^2+y^2$是完全平方数, 换句话说, 即存在一个正整数$z$ 使得$x^2+y^2=z^2$, 及$GCD(x,\ y)=d>2$, $z\mid d^2$, $w=\dfrac{xy}{z}$. 根据引理我们得到了方程(1-17)的正整数解. 因为存在无穷多个勾股数$x,\ y,\ z$满足上述情况, 故方程(1-17)有无穷多个正整数解. 因此方程(1-16)也有无穷多个正整数解. 于是完成了定理1.6的证明.

关于$S(n)$的其它性质许多学者都进行了研究. 例如, 乐茂华教授在文献[23]中研究了$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$的下界估计问题，并给出了估计式:

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)\geq 2p+1,$$

其中$p$为任意奇素数.

苏鹏丽在乐茂华教授的研究基础上对其进行了改进, 得到了Smarandache函数$S(n)$在某些特殊值$2^p+1$上一个较强的下界估计(该结论将发表于《纺织高校基础科学学报》):

$$S\left(2^p+1\right) \geq 6p+1,$$

其中$p \geq 7$为素数.

但$S(n)$的最大下界是多少这仍需大家进一步探讨.

关于$S(n)$和其它函数复合后的下界问题很少有人研究, 下面我们给出关于$S(n)$复合函数下界的新进展:

王锦瑞[24]估计了$S\left(F_n\right)$的下界, 即下面的:

**定理1.7:** 对任意的正整数$n \geq 3$, 我们有估计式

$$S\left(F_n\right) \geq 8 \cdot 2^n+1,$$

其中$F_n=2^{2^n}+1$是费马数.

**证明:** 我们首先注意到$F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$, 且这些数都是素数. 因此当$n=3$和4时, $S\left(F_3\right)=257 \geq 8 \cdot 2^3+1$, $S\left(F_4\right)=65537>8 \cdot 2^4+1$. 不失一般性, 我们假设$n \geq 5$. 若$F_n$ 是素数, 根据$S(n)$的性质有$S\left(F_n\right)=F_n=2^{2^n}+1 \geq 8 \cdot 2^n+1$. 若$F_n$是复合数, 令$p$为$F_n$的任意素因数, 显然$(2,\ p)=1$. 令$m$为2关于模$p$的指数, 即$m$是使得$2^r \equiv 1 \pmod p$成立的最小正整数$r$.

因为$p \mid F_n$, 则有$F_n=2^{2^n}+1 \equiv 0 \pmod p$ 或者$2^{2^n} \equiv -1 \pmod p$, 且$2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p$. 又由指数的性质(参见文献[6]中定理10.1), $m \mid 2^{n+1}$, 故$m$是$2^{n+1}$的一个因数. 假设$m=2^d$, 其中$1 \leq d \leq n+1$. 易知当$d \leq n$时, $p \dagger 2^d-1$, 于是我们有$m=2^{n+1}$和$m \mid \phi(p)=p-1$. 即$2^{n+1} \mid p-1$或

$$p=h \cdot 2^{n+1}+1. \tag{1-22}$$

现在我们分三种情况证明该问题:

(a) 若$F_n$至少有三个互不相同的素因数, 因$2^{n+1}+1$和$2 \cdot 2^{n+1}+1$不同时为素数且3能整除其中之一, 则由(1-22)我们有, 对于$F_n$的所有素因数, 至少存在一个素因数$p_i$使得$p_i=h_i \cdot 2^{n+1}+1 \geq 4 \cdot 2^{n+1}+1=8 \cdot 2^n+1$.

(b) 若$F_n$仅有两个不同的素因数, 不失一般性我们假设

$$F_n=\left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}$$

或者

$$F_n=\left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}.$$

若$F_n=\left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}$, 且$\alpha\geq 4$或$\beta\geq 2$, 由$S(n)$的性质我们有估计式

$$\begin{aligned}S(F_n)&\geq \max\left\{S\left(\left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\right),\ S\left(\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}\right)\right\}\\&=\max\left\{\alpha\cdot\left(2^{n+1}+1\right),\ \beta\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)\right\}\\&\geq 8\cdot 2^{n}+1.\end{aligned}$$

若$F_n=2^{2^n}+1=\left(2^{n+1}+1\right)\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)=3\cdot 2^{2n+2}+2^{n+3}+1$, $n\geq 5$, 则我们有同余式

$$0\equiv 2^{2^n}+1-1=3\cdot 2^{2n+2}+2^{n+3}\equiv 2^{n+3}\pmod{2^{n+4}}.$$

这是不可能的.

$$\begin{aligned}\text{若}F_n&=2^{2^n}+1=\left(2^{n+1}+1\right)^{2}\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)\\&=3\cdot 2^{3n+3}+3\cdot 2^{2n+3}+3\cdot 2^{n+1}+2^{2n+2}+2^{n+2}+1,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}0&\equiv 2^{2^n}+1-1=3\cdot 2^{3n+3}+3\cdot 2^{2n+3}+3\cdot 2^{n+1}+2^{2n+2}+2^{n+2}\\&\equiv 3\cdot 2^{n+1}(\bmod\ 2^{n+2}).\end{aligned}$$

这也是不可能的.

若$F_n=2^{2^n}+1=\left(2^{n+1}+1\right)^{3}\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)$, 则有同余式

$$2^{2^n}+1\equiv\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{2}\equiv 3\cdot 2^{n+2}+1(\bmod\ 2^{n+4})$$

或

$$0\equiv 2^{2^n}\equiv\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{2}-1\equiv 3\cdot 2^{n+2}(\bmod\ 2^{n+4}).$$

这与$2^{n+4}\dagger 3\cdot 2^{n+2}$矛盾.

若$F_n=\left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}$, and $\alpha\geq 2$ 或$\beta\geq 2$, 根据$S(n)$的性质我们有估计式

$$S(F_n)\ \geq\ \max\left\{S\left(\left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}\right),\ S\left(\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\beta}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \max\left\{\alpha\cdot\left(2\cdot 2^{n+1}+1\right),\ \beta\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)\right\} \\ &\geq 8\cdot 2^n+1. \end{aligned}$$

若$F_n = 2^{2^n}+1 = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)\cdot\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)$, 则有

$$F_n = 2^{2^n}+1 = 3\cdot 2^{2n+3}+5\cdot 2^{n+1}+1.$$

即

$$0 \equiv 2^{2^n} = 3\cdot 2^{2n+3}+5\cdot 2^{n+1} \equiv 5\cdot 2^{n+1} \pmod{2^{2n+3}}.$$

这仍然是不可能的.

(c) 若$F_n$仅有一个素因子, 我们假设

$$F_n = \left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha} \text{ 或者} F_n = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha} \text{ 或者} F_n = \left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}.$$

若$F_n = \left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha}$, 则当$\alpha \geq 4$时定理成立. 若$\alpha = 1$, 2或3, 由同余的性质我们可推出$F_n = \left(2^{n+1}+1\right)^{\alpha}$, 这是不可能的.

若$F_n = \left(2\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}$或$\left(3\cdot 2^{n+1}+1\right)^{\alpha}$, 则当$\alpha \geq 2$时定理成立. 若$\alpha = 1$, 必有$F_n$为素数, 此时定理也成立.

于是完成了定理的证明.

关于$S(n)$函数的奇偶性我们也有如下讨论:

**定义1.26:** $OS(n)$表示区间$[1,n]$中$S(k)$为奇数的正整数$k$的个数.

**定义1.27:** $ES(n)$表示区间$[1,n]$中$S(k)$为偶数的正整数$k$的个数.

**问题1.29:** 估计

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{ES(n)}{OS(n)}.$$

**注:** 熊文井[25]利用初等方法研究了这一问题, 并彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

**定理1.8:** 对任意正整数$n>1$, 我们有估计式

$$\frac{ES(n)}{OS(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

**证明:** 首先我们估计$ES(n)$的上界. 事实上当$n>1$时, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式, 那么由函数$S(n)$的定义及性质可设$S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若$m=1$, 那么$S(n)=p_i$为奇数, 除非$n=2$. 令$M=\ln n$, 于是我们有

$$\begin{aligned} ES(n) &= \sum_{\substack{k\le n\\ 2|S(k)}} 1 \le 1+\sum_{\substack{k\le n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\ge 2}} 1 \\ &\le 1+\sum_{S(k)\le M} 1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}} 1. \end{aligned} \tag{1-23}$$

现在我们分别估计(1-23)式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}} 1 &\le \sum_{\substack{kp^2\le n\\ 2p>M}} 1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}} 1 \\ &\le \sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}} \sum_{k\le \frac{n}{p^2}} 1+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}} \sum_{k\le\frac{n}{p^\alpha}} 1 \\ &\ll \sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}} \frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}} \frac{n}{p^\alpha} \\ &\ll \frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge p}} \frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\le\alpha<p}} \frac{n}{p^\alpha} \\ &\ll \frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}} \frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\ge 3}} \frac{n}{p^\alpha} \\ &\ll \frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n}. \end{aligned} \tag{1-24}$$

对于(1-23)式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数$p\le M$, 令$\alpha(p)=\left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是$\alpha(p)$表示不超过$\frac{M}{p-1}$的最大整数. 设$u=\prod\limits_{p\le M} p^{\alpha(p)}$. 对任意满足$S(k)\le M$的正整数$k$, 设$S(k)=S(p^\alpha)$, 则由$S(k)$的定义一定有$p^\alpha|M!$, 从而, $\alpha\le\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\frac{M}{p^j}\right]\le\frac{M}{p-1}$. 所以所有满足$S(k)\le M$的正整数$k$一定整除$u$，所有这样$k$的个数不会超过$u$的正因

数的个数, 即就是$d(u)$. 所以我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{S(k)\le M} 1 &\le \sum_{d|u} 1=\prod_{p\le M}(1+\alpha(p))=\prod_{p\le M}\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\\
&= \exp\left(\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right), \qquad (1\text{-}25)
\end{aligned}
$$

其中$\exp(y)=e^y$.

由素数定理的两种形式(参阅文献[3]及[5])

$$\pi(M)=\sum_{p\le M}1=\frac{M}{\ln M}+O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right)$$

及

$$\sum_{p\le M}\ln p=M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$$

可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\le\sum_{p\le M}\ln\left(1+\frac{M}{p-1}\right)\\
=&\sum_{p\le M}\left[\ln(p-1+M)-\ln p-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\\
\le&\ \pi(M)\cdot\ln(2M)-\sum_{p\le M}\ln p+\sum_{p\le M}\frac{1}{p}\\
=&\ \frac{M\cdot\ln(2M)}{\ln M}-M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)=O\left(\frac{M}{\ln M}\right). \qquad (1\text{-}26)
\end{aligned}
$$

注意到$M=\ln n$, 由(1-25)及(1-26)式立刻得到估计式:

$$\sum_{S(k)\le M}1\ll\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right), \qquad (1\text{-}27)$$

其中$c$为一正常数.

注意到$\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\ll\frac{n}{\ln n}$, 于是结合(1-23), (1-24)及(1-27)式立刻推出估计式:

$$ES(n)=\sum_{\substack{k\le n\\ 2|S(k)}}1=O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

显然$OS(n)+ES(n)=n$, 所以由上式可得:

$$OS(n)=n-ES(n)=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

从而

$$\frac{ES(n)}{OS(n)}=\frac{O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理的证明.

由此定理我们立刻得到下面的:

**推论1.2:** 对任意正整数$n$, 我们有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ES(n)}{OS(n)}=0.$$

根据$S(n)$函数的奇偶性的研究, 张爱玲[26]又研究了极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{PS}(n)}{n}$的存在问题, 其中$\mathrm{PS}(n)$表示区间$[1,\ n]$中$S(n)$为素数的正整数个数, 具体的说就是下面的:

**定理1.9:** 对任意正整数$n>1$, 我们有渐近公式

$$\frac{\mathrm{PS}(n)}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

**推论1.3:** 对任意正整数$n$，我们有极限

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\mathrm{PS}(n)}{n}=1.$$

**证明:** 首先我们估计$n-\mathrm{PS}(n)$的上界. 事实上当$n>1$时，设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式, 那么由函数$S(n)$的定义及性质可设$S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若$\alpha_i=1$, 那么$m=1$且$S(n)=p_i$为素数. 若$\alpha_i>1$, 那么$m>1$, 则$S(n)$为合数. 所以$n-\mathrm{PS}(n)$为区间$[1,\ n]$中所

有$S(n)=1$及$S(n)$为合数的$n$的个数! 显然$S(n)=1$当且仅当$n=1$. 于是令$M=\ln n$, 则我们有

$$n-\mathrm{PS}(n)=1+\sum_{\substack{k\le n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\ge 2}}1\le 1+\sum_{S(k)\le M}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}}1. \tag{1-28}$$

现在我们分别估计(1-28)式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}}1 &\le \sum_{\substack{kp^2\le n\\ 2p>M}}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}}1\\
&\le \sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}}\sum_{k\le\frac{n}{p^2}}1+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}}\sum_{k\le\frac{n}{p^\alpha}}1\\
&\ll \sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}}\frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}}\frac{n}{p^\alpha}\\
&\ll \frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge p}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\le\alpha<p}}\frac{n}{p^\alpha}\\
&\ll \frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\ge 3}}\frac{n}{p^\alpha}\\
&\ll \frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n}.
\end{aligned} \tag{1-29}$$

对于(1-28)式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数$p\le M$, 令$\alpha(p)=\left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是$\alpha(p)$表示不超过$\frac{M}{p-1}$的最大整数. 设$u=\prod\limits_{p\le M}p^{\alpha(p)}$. 对任意满足$S(k)\le M$的正整数$k$, 设$S(k)=S(p^\alpha)$, 则由$S(k)$的定义一定有$p^\alpha|M!$, 从而$\alpha\le\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\frac{M}{p^j}\right]\le\frac{M}{p-1}$. 所以所有满足$S(k)\le M$的正整数$k$一定整除$u$，而这样$k$的个数不会超过$u$的正因数的个数, 即就是$d(u)$. 所以我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{S(k)\le M}1\le\sum_{d|u}1 &= \prod_{p\le M}(1+\alpha(p))=\prod_{p\le M}\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\\
&= \exp\left(\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right),
\end{aligned} \tag{1-30}$$

其中$\exp(y)=e^y$.

由素数定理的两种形式(参阅文献[3]及[5])

$$\pi(M)=\sum_{p\leq M}1=\frac{M}{\ln M}+O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right),\quad \sum_{p\leq M}\ln p=M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$$

可得:

$$\begin{aligned}
& \sum_{p\leq M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\leq\sum_{p\leq M}\ln\left(1+\frac{M}{p-1}\right)\\
= & \sum_{p\leq M}\left[\ln\left(p-1+M\right)-\ln p-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\\
\leq & \pi(M)\cdot\ln(2M)-\sum_{p\leq M}\ln p+\sum_{p\leq M}\frac{1}{p}\\
= & \frac{M\cdot\ln(2M)}{\ln M}-M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)=O\left(\frac{M}{\ln M}\right). \qquad (1\text{-}31)
\end{aligned}$$

注意到$M=\ln n$, 由(1-30)及(1-31)式立刻得到估计式:

$$\sum_{S(k)\leq M}1\ll\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right), \qquad (1\text{-}32)$$

其中$c$为一正常数.

注意到$\exp\left(\dfrac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\ll\dfrac{n}{\ln n}$, 于是结合(1-28), (1-29)及(1-32)式立刻推出估计式：

$$n-\mathrm{PS}(n)=1+\sum_{\substack{k\leq n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\geq 2}}1=O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

所以

$$\mathrm{PS}(n)=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理的证明.

由定理直接可推出推论1.3.

## 1.15 Smarandache双阶乘函数

**定义1.28:** 对任意的正整数$n$, $Sdf(n)$定义为最小的正整数$m$使得$m!!$是$n$的一个倍数, 即$Sdf(n)=\min\{m:\ m!!=kn,\ m\in N,\ k\in N\}$. 这个函数的前几值为:

$$1,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots.$$

**问题1.30:** 讨论$|Sdf(n+1)-Sdf(n)|$是否有界.

**问题1.31:** 寻找方程$\dfrac{Sdf(n+1)}{Sdf(n)}=k$, $\dfrac{Sdf(n)}{Sdf(n+1)}=k$的正整数解. 其中$k$ 是任意正整数, 并且对于前一个方程$n>1$.

**猜想1.4:** 第一个方程无解.

**问题1.32:** 我们定义$Sdf(n)$ 的$k$次复合为:

$$Sdf^k(n)=Sdf(Sdf(Sdf\cdots(Sdf(n))\cdots)),$$

其中$Sdf$重复$k$次. 对于所有的$n$, 研究$Sdf(n)$的每一次复合是否都能得到一个定值或者是一个循环.

**问题1.33:** 寻找最小的正整数$k$, 使得$Sdf(n)$和$Sdf(k+n)$之间至少存在一个素数.

**问题1.34:** 对于$n\geq 1$, 讨论由Smarandache双阶乘函数$Sdf(n)$顺次排列所构成的数字$0.1232567491011\cdots$是有理数还是无理数. 我们称这个数是伪Smarandache双阶乘常数.

**问题1.35:** 估计$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot Sdf(k)^{-1}$的值.

**问题1.36:** 估计$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(n)}$的值.

**问题1.37:** 估计$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{Sdf(k)}{\theta(k)}$的值, 其中$\theta(k)=\displaystyle\sum_{n\leq k}\ln(Sdf(n))$.

**问题1.39:** 是否存在非零正整数$m$,$n$,$k$, 使得等式

$$Sdf(n\cdot m)=m^k\cdot Sdf(n)$$

成立.

**问题1.39:** 寻求方程$Sdf(n)!=Sdf(n!)$的所有正整数解.

**问题1.40:** 对于$k>1$和$n>1$, 寻求方程$Sdf(n^k)=k\cdot Sdf(n)$的所有正整数解.

**问题1.41:** 对于$k>1$, 寻求方程$Sdf(n^k)=n\cdot Sdf(k)$的所有正整数解.

**问题1.42:** 寻求方程$Sdf(n^k)=n^m\cdot Sdf(m)$的所有正整数解, 其中$k>1$, $m$, $n>0$.

**问题1.43:** 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{n}{Sdf(n)}\leq\frac{1}{8}\cdot n+2,\quad 1\leq n\leq 1000$$

成立. 当$n>1000$时, 该不等式是否依然成立.

**问题1.44:** 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{Sdf(n)}{n}\leq\frac{1}{n^{0.73}},\quad 1\leq n\leq 1000$$

成立. 当$n>1000$时, 该不等式是否依然成立.

**问题1.45:** 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{Sdf(n)}<n^{-\frac{1}{4}},\quad 1\leq n\leq 1000$$

成立. 当$n>1000$时, 该不等式是否依然成立.

**问题1.46:** 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{1}{n\cdot Sdf(n)}<n^{-\frac{5}{4}},\quad 1\leq n\leq 1000$$

成立. 当$n>1000$时, 该不等式是否依然成立.

**问题1.47:** 研究Smarandache双阶乘函数函数$Sdf(n)$的调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf^{a}(n)},\quad 其中a>0,\ a\in R$$

的敛散性.

**问题1.48:** 讨论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln Sdf(k)}{\ln(k)}}{n}$$

的值是否收敛于某个著名的数学常数.

**问题1.49:** 求解方程

$$Sdf(n)^{r}+Sdf(n)^{r-1}+\cdots+Sdf(n)=n,$$

其中$r\geq 2$是正整数. 以及

$$Sdf(n)^{r}+Sdf(n)^{r-1}+\cdots+Sdf(n)=n,$$

其中$r,\ k\geq 2$都是正整数.

**问题1.50:** 讨论$Sdf\left(\prod\limits_{k=1}^{m}m_k\right)$和$\sum\limits_{k=1}^{m}Sdf(m_k)$的关系.

**问题1.51:** 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(n)}$的敛散性.

**结论:** 由和式$\sum\limits_{p}\frac{1}{p}$的发散性可直接得到的$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(n)}$是发散的, 其中$p$是任意素数. 事实上, 由于对于任意素数$p$, $Sdf(p)=p$, 因此$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(k)}>\sum\limits_{p}\frac{1}{p}$, 故该级数是发散的.

**问题1.52:** 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{Sdf(n)}{n}$的敛散性.

**结论:** 事实上, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{Sdf(k)}{k}>\sum\limits_{p=1}^{\infty}\dfrac{Sdf(p)}{p}$, 其中$p$是任意素数. 由于素数$p$有无穷多个, 并且$Sdf(p)=p$, 因此$\sum\limits_{p=1}^{\infty}\dfrac{Sdf(p)}{p}$是发散的.

**问题1.53:** *对任意的正整数$n$, 不等式$Sdf(n)\geq 1$是否成立.*

**结论:** 该问题可以由该函数的定义直接得到. 事实上, 当$n=1$时, 满足定义的最小正整数一定是1. 当$n\neq 1$时, 由于1的阶乘一定不是$n$的倍数, 所以$Sdf(n)\geq 1$.

**问题1.54:** *求丢番图方程$Sdf(n)=Sdf(n+1)$的所有正整数解.*

**结论:** 事实上, 因为函数$Sdf(n)$保持奇偶性不变, 即就是$Sdf$(偶)=偶, $Sdf$(奇)=奇. 因此当$n$为奇数时, $Sdf(n)$ 也是奇数, 但$n+1$是偶数, $Sdf(n+1)$是偶数. 此时方程无解. 同理可得, 当$n$为偶数时, 方程无解.

**问题1.55:** *讨论$Sdf(n)$与$S(n)$的关系.*

**结论:** 我们很容易看出$Sdf(n)$为使得$Sdf(n)!\geq S(n)$的最小正整数.

**注:** 利用问题1.55的结论, 张福玲和李江华[27]利用初等及解析方法研究函数$Sdf(n)$ 的均值性质, 并给出一个较强的渐近公式. 同时, 王建平[28]对问题1.55也进行了讨论, 并对$Sdf(n)$与正整数$n$的最大素因数$P(n)$的关系进行了研究.

首先我们给出张福玲和李江华的研究结果及证明过程:

**定理1.10:** *设$n$为任意的正整数, 则对任意实数$x\geq 1$我们有渐近公式*

$$\sum_{n\leq x}Sdf(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

**证明:** 根据函数$S(n)$的性质及$Sdf(n)$ 的定义, 有

$$Sdf(n)!\geq S(n)\geq (Sdf(n)-1)!.$$

对该式两边取对数可得

$$\sum_{i\le Sdf(n)} \ln i \ge \ln S(n) \ge \sum_{i\le Sdf(n)-1} \ln i.$$

由Euler求和公式[3], 有:

$$\sum_{i\le Sdf(n)} \ln i = m\ln m - m + O(\ln m),$$
$$\sum_{i\le Sdf(n)-1} \ln i = m\ln m - m + O(\ln m).$$

于是

$$m\ln m - m + O(\ln m) \ge \ln S(n) \ge m\ln m - m + O(\ln m),$$

所以

$$\ln S(n) = m\ln m - m + O(\ln m), \tag{1-33}$$

即

$$m = \frac{\ln S(n)}{\ln m - 1} + O(1).$$

由(1-33)还可推出$\ln m \sim \ln\ln S(n)$, 那么

$$\begin{aligned} m &= \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n) - 1} + O(1) \\ &= \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} + O\left(\frac{\ln S(n)}{\ln^2\ln S(n)}\right). \end{aligned} \tag{1-34}$$

因为$m = Sdf(n)$，所以由(1-34)式可得

$$\sum_{n\le x} Sdf(n) = \sum_{n\le x} \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} + O\left(\sum_{n\le x} \frac{\ln S(n)}{\ln^2\ln S(n)}\right).$$

而

$$\sum_{n\le x} \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} \le \sum_{n\le x} \frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

则有

$$\sum_{n\le x} \frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} \quad\le\quad \sum_{n\le x} \frac{\ln n}{\ln\ln n} = \frac{x\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right)$$

$$\leq \frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{\ln^2\ln x}\right). \tag{1-35}$$

对任意正整数$n$, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$表示$n$的素幂分解. 将所有$1\leq n\leq x$ 的正整数$n$分为两个子集合$A$和$B$, 其中集合$A$包含区间$[1,\ x]$中所有满足$\alpha_i\geq 2$ 的正整数$n$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$. 而集合$B$包含区间$[1,\ x]$中所有不属于集合$A$的那些正整数, 那么

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}. \tag{1-36}$$

由函数$S(n)$的性质我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} &\ll \sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}\frac{\ln x}{\ln\ln x}\ll\frac{\ln x}{\ln\ln x}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}1\\ &\ll \frac{\sqrt{x}\ln x}{\ln\ln x}\ll O\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right).\end{aligned} \tag{1-37}$$

此外，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} &= \sum_{\substack{np\leq x\\ (n,\ p)=1}}\frac{\ln S(np)}{\ln\ln S(np)}>\sum_{\substack{np\leq x\\ (n,\ p)=1}}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\\ &= \sum_{p\leq x}\sum_{n\leq\frac{x}{p}}\frac{\ln p}{\ln\ln p}=x\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p\ln\ln p}+O\left(\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\right)\\ &= x\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln\ln p}+O\left(\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\right).\end{aligned} \tag{1-38}$$

由Abel's 恒等我们可得

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln\ln p}=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{\ln x}{\ln^2\ln x}\right) \tag{1-39}$$

及

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\ll\frac{x}{\ln\ln x}. \tag{1-40}$$

于是结合(1-35), (1-36), (1-37), (1-38), (1-39)及(1-40)式, 立刻得到

$$\sum_{n\leqslant x} Sdf(n) = \frac{x\ln x}{\ln\ln x} + O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

于是完成了定理的证明.

下面我们给出王建平的研究结论及其证明过程:

**定理1.11:** 对任意实数$x>1$和任意固定的正整数$k$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(Sdf(n)-P(n))^2 = \frac{\zeta(3)}{24}\frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中$P(n)$是$n$的最大素因数, 且$c_i$是可计算的常数.

**定理1.12:** 对任意的实数$x>1$ 和任意固定的正整数$k$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}(Sdf(n)-S(n))^2 = \frac{\zeta(3)}{24}\frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

**证明:** 我们首先证明定理1.11. 将区间$[1,\ x]$中的所有正整数$n$分成两个集合$A$和$B$如下: $A=\{n:\ 1\le n\le x,\ P(n)>\sqrt{n}\}$; $B=\{n:\ 1\le n\le x,\ n\notin A\}$, 其中$P(n)$是$n$的最大素因数. 若$n\in A$, 则$n=m\cdot P(n)$且$P(m)<P(n)$. 根据$A$的定义我们有$Sdf(2)=2$. 对任意的正整数$n>2$且$n\in A$, 若$2\dagger n$, $Sdf(n)=P(n)$; 若$2|n$, $Sdf(n)=2P(n)$. 根据这个性质, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^2\\
=&\sum_{\substack{2n\le x\\ 2n\in A}}(Sdf(2n)-P(2n))^2 + \sum_{\substack{2n-1\le x\\ 2n-1\in A}}(Sdf(2n-1)-P(2n-1))^2\\
=&\sum_{\substack{n\le \frac{x}{2}\\ 2n\in A}}(Sdf(2n)-P(2n))^2 = \sum_{\substack{1<n\le\frac{x}{2}\\ 2n\in A}}(2P(2n)-P(2n))^2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{1<n\le \frac{x}{2}\\ 2n\in A}} P^2(2n) = \sum_{\substack{np\le \frac{x}{2}\\ p>2n}} p^2 = \sum_{n\le \frac{\sqrt{x}}{2}} \sum_{2n<p\le \frac{x}{2n}} p^2. \tag{1-41}$$

由Abel求和公式(见参考文献[3]定理4.2)和素数定理(见参考文献[7]定理3.2):

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i\cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中$a_i$ $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 为常数, $a_1=1$.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{2n<p\le \frac{x}{2n}} p^2 &= \frac{x^2}{(2n)^2}\cdot\pi\left(\frac{x}{2n}\right) - (2n)^2\cdot\pi(2n) - 2\int_{2n}^{\frac{x}{2n}} y\cdot\pi(y)dy\\ &= \frac{x^3}{24n^3\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^3\cdot \ln^i n}{n^3\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1} x}\right).\end{aligned} \tag{1-42}$$

其中我们用到估计式$2n\le\sqrt{x}$, $b_i$为可计算常数.

注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}=\zeta(3)$, 根据(1-41)和(1-42)我们可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} (Sdf(n)-P(n))^2 = \frac{\zeta(3)}{24}\frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right), \tag{1-43}$$

其中$c_i$ 为可计算常数.

对任意正整数$n$且$n\in B$, 易见$Sdf\ll\sqrt{n}\cdot\ln n$和$P(n)\ll\sqrt{n}$. 故有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} (Sdf(n)-P(n))^2 \ll \sum_{n\le x} n\cdot\ln^2 n \ll x^2\cdot\ln^2 x. \tag{1-44}$$

结合(1-43)和(1-44)可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}(Sdf(n)-P(n))^2 &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}(Sdf(n)-P(n))^2 + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}(Sdf(n)-P(n))^2\\ &= \frac{\zeta(3)}{24}\frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right),\end{aligned}$$

其中$c_i$为可计算常数. 于是完成了定理1.11的证明.

现在我们证明定理1.12. 注意到$S(n)-P(n)=0$, 若$n\in A$; $|S(n)-P(n)|\ll\sqrt{n}$, 若$n\in B$. 因此根据文献[29]的结论和定理1.11的证明, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}(Sdf(n)-S(n))^2 &= \sum_{n\leq x}(Sdf-P(n))^2+\sum_{n\leq x}(S(n)-P(n))^2\\ &\quad -2\sum_{n\leq x}(S(n)-P(n))\cdot(Sdf(n)-S(n))\\ &= \frac{\zeta(3)}{24}\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).\end{aligned}$$

即完成了定理的1.12证明.

**问题1.56:** 讨论$Sdf\left(\prod_{k=1}^{m}m_k\right)$和$\sum_{k=1}^{m}Sdf(m_k)$的关系.

**注:** 王晓瑛[30]对该问题进行了研究, 得出了以下结论:

**定理1.13:** *对任意的正整数$k\geq 4$, 存在无穷多个正整数组$(m_1,\ m_2\cdots,\ m_k)$ 满足方程*

$$Sdf\left(\sum_{i=1}^{k}m_i\right)=\sum_{i=1}^{k}Sdf(m_i).$$

**定理1.14:** *对任意的正整数$k\geq 5$, 存在无穷多个正整数组$(m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k)$ 满足方程*

$$Sdf\left(\prod_{i=1}^{k}m_i\right)=\sum_{i=1}^{k}Sdf(m_i).$$

为了完成定理的证明, 我们需要用著名的Vinogradov三素数定理, 即下面的:

**引理1.7:** *存在足够大的常数$K>0$, 使得每个大于$K$的奇数$n$可以表示为三个素数之和. 即$n=p_1+p_2+p_3$, 其中$p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$是奇素数.*

**证明：** 参见文献[8].

**引理1.8:** 设$k \geq 3$是一个奇数, 则任意大的奇数$n$都可以表示成$k$个奇素数之和, 即

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

**证明：** 参见文献[31].

**证明：** 下面我们运用以上的引理来证明定理. 首先我们来证明定理1.13. 若$k \geq 4$ 是一个奇数, 则根据引理1.8可得, 对任意大的素数$p$, 它可以表示成$k$个素数之和:

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

由$Sdf(n)$的定义我们有$Sdf(p) = p$. 这表明

$$\begin{aligned} p &= Sdf(p) = Sdf(p_1 + p_2 + \cdots + p_k) \\ &= p_1 + p_2 + \cdots + p_k = Sdf(p_1) + \cdots + Sdf(p_k). \end{aligned}$$

若$k \geq 4$是一个偶数, 则$k - 1 \geq 3$是奇数. 因此若素数$p$足够大, 则$p - 2$可以表示为$k - 1$个素数之和:

$$p - 2 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1}.$$

这表明

$$p = 2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1}$$

或者

$$\begin{aligned} p &= Sdf(p) = Sdf(2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1}) \\ &= 2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1} = Sdf(2) + Sdf(p_1) + \cdots + Sdf(p_k). \end{aligned}$$

因为存在无穷多个素数$p$, 故存在无穷多个正整数组$(m_1,\ m_2 \cdots,\ m_k)$ 满足方程

$$Sdf\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Sdf(m_i).$$

于是完成了定理1.13的证明.

现在我们来证明定理1.14. 若$k \geq 5$是奇数,则$k-2 \geq 3$也为奇数. 对足够大的素数$p$, 根据引理1.8, $p$可以表示为$k-2$个素数之和:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{k-2}.$$

注意到$Sdf(p^2) = 3p$, 则由上面的等式有

$$\begin{aligned} Sdf(p_1 \cdot_2 \cdots p_{k-2} \cdot p \cdot p) &= Sdf(p^2) = 3p = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-2} + 2p \\ &= \sum_{i=1}^{k-2} Sdf(p_i) + Sdf(p) + Sdf(p). \end{aligned}$$

取$m_i = p_i$, $i = 1,\ 2,\ k-2$, $m_{k-1} = m_k = p$, 根据上述讨论我们有

$$Sdf\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Sdf(m_i).$$

若$k \geq 5$是偶数, 则$k-3 \geq 3$也是偶数. 对足够大的素数$p$, 根据引理1.8可知$p-4$可以表示为$k-3$个素数之和: $p-4 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-3}$. 故

$$2p = 2 + 2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-3} + p.$$

这表明

$$Sdf(2 \cdot 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_{k-3} \cdot p) = 2p = 2 + 2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-3} + p.$$

取$m_i = p_i$, $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k-3$, $m_{k-2} = m_{k-1} = 2$, $m_k = p$,由上述讨论可知

$$Sdf\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Sdf(m_i).$$

因为存在无穷多个素数$p$, 因此存在无穷多个正整数组$(m_1, m_2 \cdots, m_k)$满足方程

$$Sdf\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Sdf(m_i).$$

即完成了定理1.14.

但当$k=4$时, 运用这种方法定理1.14不成立. 是否存在无穷多个正整数组($m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$)满足方程

$$Sdf\left(\prod_{i=1}^{4} m_i\right)=\sum_{i=1}^{4} Sdf(m_i)$$

仍然是一个值得讨论的问题.

**问题1.57:** 给定任意的正整数$n$, $n$在该序列中出现多少次? .

## 1.16 Smarandache商函数

**定义1.29:** 对任意的正整数$n$, $n$的Smarandache商函数$SQ(n)$为最小的整数$k$使得$nk$是一个阶乘数. 它的前几个值为:

$$1,1,2,6,24,1,720,3,80,12,3628800,2,479001600,360,\cdots.$$

**问题1.58:** 该序列是否含有无穷多个阶乘数?

**结论:** 若$p$是素数, 则有$SQ(p)=(p-1)!$, 故该序列含有无穷多个阶乘数.

**问题1.59:** 该序列含有多少个素数方幂?

**问题1.60:** 该序列含有多少个平方数, 立方数, $\cdots$?

对Smarandache商函数的性质, 很少有人进行研究. 齐小军研究了关于该函数无穷级数的性质, 并得出以下结论(此结论将发表于《Scientia Magna》):

(a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{SQ(n)\cdot n}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{m\cdot d(m!)}{(m+1)!},$$

其中$d(n)$是除数函数.

(b) 设$SQ(2n-1)$是使得$SQ(2n-1)\cdot(2n-1)$为双阶乘数的最小正奇数. 也就是说, $SQ(2n-1)\cdot(2n-1)=(2m-1)!!$, $(2m-1)!!=$

$1\times3\times5\times\cdots\times(2m-1)$. 对序列$\{SQ(2n-1)\}$, 有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{SQ(2n-1)\cdot(2n-1)}=2\cdot\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{m\cdot d((2m-1)!!)}{(2m+1)!!},$$

其中$d(n)$是除数函数.

## 1.17 Smarandache $p$次幂原函数

**定义1.30:** 令$p$是素数且$n\ \geq\ 0$, 定义$S_p(n)$为最小的正整数$m$使得$p^n|m!$.

**问题1.61:** Smarandache指出, 对固定的素数$p$, 当$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$时, $S_p(n)$是由$p$的倍数组成的序列且每一个数都重复$n$次. 这个序列也可用于计算Smarandache函数值.

**结论:** 根据定义我们可以推出, 该数列的每一项都是$p$的倍数. 换句话说, $p$的倍数都是该序列中的一项. 若$p^k\ \|\ S_p(n)$, 则$S_p(n)$到$S_p(n+k-1)$都相等, 因此这个数字重复出现的次数是$p$的指数.

## 1.18 第一类伪Smarandache素数

**定义1.31:** 对任意的正整数$n$, 若它本身或它的数位置换是一个素数, 则称为其第一类伪 Smarandache素数. 该序列的前几个元素为:

$$2,3,5,7,11,13,14,16,17,19,20,23,29,30,\cdots.$$

Smarandache又给出了其它两个伪素数的定义, 即:

**定义1.32:** 对任意的正整数$n$, 若它是一个合数且它的数位置换是一个素数, 则称为其第二类伪 Smarandache素数.

**定义1.33:** 对任意的正整数$n$, 若它的数位的平凡置换是一个素数, 则称为其第三类伪 Smarandache素数.

现在我们来研究第一类伪Smarandache素数.

**问题1.62:** 有多少伪Smarandache素数是平方数, 立方数, $\cdots$.

**问题1.63:** 是否存在最大的$k$值使得

$$n, n+1, n+2, \cdots, n+k$$

都是第一类伪Smarandache素数.

**结论:** 若一个数是3的倍数, 则它的任意数位置换仍可被3整除. 因此$k=2$.

**问题1.64:** 假设SPPFK(n)是第一类伪Smarandache素数的第$n$个数. 估计

$$\mathrm{SPPFK}(n+1) - \mathrm{SPPFK}(n)$$

的上界.

**猜想1.5:**

$$\mathrm{SPPFK}(n+1) - \mathrm{SPPFK}(n)$$

无上界.

**问题1.65:** 设$S_{pp}(n)$表示小于等于$n$的第一类伪Smarandache素数的正整数的个数. 估计

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{pp}(n)}{n}.$$

该问题可用于研究第二类和第三类伪Smarandache素数.

## 1.19 第一类伪Smarandache平方数

**定义1.34:** 对任意的正整数$n$, 若它本身或它的数位置换是一个完全平方数, 则称为其第一类伪 Smarandache平方数. 该序列的前几个元素为:

$$1, 4, 9, 10, 16, 18, 25, 36, 40, 49 \cdots.$$

Smarandache同样给出了其它两个伪平方数的定义, 即:

**定义1.35:** 对任意的正整数$n$, 若它不是一个完全平方数但它的数位置换是一个完全平方数, 则称为其第二类伪 Smarandache平方数.

**定义1.36:** 对任意的正整数$n$, 若它的数位的平凡置换是一个完全平方数, 则称为其第三类伪 Smarandache平方数.

**问题1.66:** 有多少个第一类伪 Smarandache平方数是素数?

**猜想1.6:** 有无穷多个第一类伪 Smarandache平方数是素数.

**问题1.67:** 是否存在最大的$k$值使得

$$n, n+1, n+2, \cdots, n+k$$

都是第一类伪 Smarandache平方数.

**猜想1.7:** $k$是有限的.

**问题1.68:** 假设SPSFK$(n)$是第一类伪Smarandache平方数的第$n$项, 研究

$$\mathrm{SPSFK}(n+1) - \mathrm{SPSFK}(n)$$

的最大值.

**猜想1.8:**

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{SPSFK}(n+1) - \mathrm{SPSFK}(n))$$

不存在.

**问题1.69:** 研究自然数是第一类伪 Smarandache平方数的百分比.

**问题1.70:** 首先我们给出一个定义:

**定义1.37:** 对任意的正整数$n$, 若它本身或它的数位置换是一个$m$次方幂数, 则称为其第一类伪 Smarandache $m$次方幂数.

问题1.66-1.69也可用于研究该函数.

**问题1.71:** 我们先定义一个新的函数:

**定义1.38:** 对任意的正整数$n$, 若它本身或它的数位置换是一个阶乘数, 则称为其第一类伪 Smarandache阶乘数.

问题1.66-1.69同样可用于研究此函数.

## 1.20 Goldbach-Smarandache序列

1742年, Goldbach提出了著名的至今未解决的猜想:

每一个整数$2n \geq 4$是两个素数之和.

根据Goldbach猜想, Smarandache定义了一个新的序列:

**定义1.39:** *定义$t(n) = m$为最大的偶数使得其它不超过$m$的偶数是从$n$开始的两个奇素数之和. 它的前几个值为:*

$$6, 10, 14, 18, 26, 30, 38, 42, 42, 54, 62, 74, 74, 90, \cdots.$$

**问题1.72:** *以上列表的所有值是否都与2同余于模4? 该序列的每一项是否也与2同余于模4?*

**问题1.73:** *该序列中存在多少个素数使得它们中两个元素之和表示所有不超过$2n$的偶数?*

## 1.21 Vinogradov-Smarandache序列

Vinogradov猜想涉及到了素数之和. 即所有的偶数都是三个素数之和.

根据这一猜想, Smarandache给出了以下定义:

**定义1.40:** *定义$v(n) = m$为最大的奇数使得其它不超过$m$且大于等于9的奇数是从$n$开始的三个奇素数之和. 它的前几个值为:*

$$9, 15, 21, 29, 39, 47, 57, 65, 71, 93, 99, 115, 129, 137, \cdots.$$

**问题1.74:** *研究序列中元素间的同余关系并确定是否存在一个同余式.*

**问题1.75:** *存在多少个素数使得它们中三个元素之和表示所有不超过$3n$的奇数?*

## 1.22 Smarandache-Vinogradov序列

该序列的定义与前面的不同, 因此要注意定义的顺序.

**定义1.41:** $a(2k+1)$表示使得$2k+1$为三个奇数之和的不同的组合数. 该序列的前几个元素为:

$$0,0,0,0,1,2,4,4,6,7,9,10,11,15,17,16,19,19,23,25,\cdots.$$

**问题1.76:** 该序列中, 存在邻项是递减趋势, 例如$(17,16)$和$(43,39)$. 研究递减邻项差的极限.

**问题1.77:** 讨论

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a(2k+1)}{2k+1}$$

是否存在?

同样我们可以定义Smarandache-Goldbach猜想:

**定义1.42:** $b(2k)$表示使得$2k$为两个素数之和的不同的组合数. 该序列的前几个元素为:

$$0,1,1,1,2,1,2,2,2,2,3,3,3,2,3,2,4,\cdots.$$

**问题1.78:** 研究序列中递减邻项差的极限.

**问题1.79:** 讨论

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b(2k)}{2k}$$

是否存在?

## 1.23 Smarandache-Logics序列

1)Smarandache Paradoxist数

**定义1.43:** 一个数$n$为Smarandache Paradoxist数当且仅当它不是Smarandache定义的任意一个序列.

2)非Smarandache数

**定义1.44:** 一个数$n$为非Smarandache Paradoxist数当且仅当它不是Smarandache定义的任意一个序列且不是Smarandache Paradoxist数.

**注:** 通过逻辑分析Smarandache Paradoxist数和非Smarandache数都是空集.

## 1.24 Smarandache-Position序列

**定义1.45:** 给定一个整数$x_n$的序列,

$$U_k(x_n)=\begin{cases}\sum(\max(i)), & x\text{是第}10^i\text{个数字};\\ -1, & \text{其它情况}.\end{cases}$$

例如, 当$x_n$是第个素数且$k=2$时, 该序列的前几个元素为:

$$0,-1,-1,-1,-2,-2,-2,-2,0,0,-2,-2,-2,-2,\cdots.$$

**问题1.80:** 该序列属于什么类型?

**问题1.81:** 研究$k\neq 2$, $x_n$是第$n$个素数的情况. 一般而言, 数字$\{1,2,\ldots,9\}$中哪个数出现的次数最多?

## 1.25 Smarandache孪生素数

**定义1.46:** 设$p_1$和$p_2$是两个素数, 当$p_1<p_2$ 且$p_2-p_1=2$时, 则我们称$p_1$和$p_2$是孪生素数.

**定义1.47:** 设$p$是任意一个正整数, 则$p$和$p+2$是伪孪生素数当且仅当

$$\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p+1)!+1}{p+2} \tag{1-45}$$

是一个整数.

**注:** 若$p$和$p+2$是经典孪生素数, 则它们也是伪孪生素数. 因为根据Wilson定理, (1-45)的第一项和第二项是整数.

**问题1.82:** 设$p$是一个正整数, 证明: $p$和$p+2$是孪生素数当且仅当

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$$

是一个整数.

**问题1.83:** 是否存在不是经典孪生素数的伪孪生素数.

**注:** 对问题1.82和问题1.83李江华[34]用初等方法已完全解决, 其证明过程如下:

**证明:** 首先我们来解决问题1.82.

根据Wilson's 定理, 易知对任意的素数$p$,

$$(p-1)!\equiv -1(\bmod p).$$

故

$$p \mid (p-1)!+1.$$

因此

$$\frac{(p-1)!+1}{p} \tag{1-46}$$

是整数. 因$p+2$是素数, 故有$(p+1)!+1\equiv 0(\bmod p+2)$, 即

$$(p-1)!\cdot p\cdot(p+1)+1\equiv 0(\bmod p+2)$$

或

$$2(p-1)!+1\equiv 0(\bmod p+2).$$

也就是说

$$\frac{2(p-1)!+1}{p+2}\quad \text{是整数.} \tag{1-47}$$

注意到

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}=\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{2(p-1)!+1}{p+2},$$

根据(1-46) 和(1-47) 我们有

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\text{是整数}.$$

现在我们证明若

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2} \tag{1-48}$$

是整数, 则$p$和$p+2$不是素数.

事实上若该结论不正确, 则有以下三种情况:

(a) $p$和$p+2$ 都是素数;

(b) $p$是素数, $p+2$不是素数;

(c) $p$不是素数, $p+2$是素数.

若(a) 成立, 则至少存在两对整数$a$ 和$b$, $c$ 和$d$ 且有$p=a\cdot b$, $p+2=c\cdot d$. 易见, $a<p$ , $b<p$, $c<p+2$, $d<p+2$. 若$p=4$, $p+2=6$, 易知(1-48)不是整数. 故设$p>4$, 此时有$a|(p-1)!$, $b|(p-1)!$, $p=ab|(p-1)!$ (若$a=b$, $2a|(p-1)!$, 有$p|(p-1)!$). 因此,

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\text{不是整数}.$$

若(b) 成立, 我们有$\dfrac{(p-1)!+1}{p}$ 和$\dfrac{2(p+1)!}{p+2}$都是整数, 但$\dfrac{1}{p+2}$不是整数. 故

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}=\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{2(p+1)!}{p+2}+\frac{1}{p+2}$$

不是整数.

若(c) 成立, 易知$\dfrac{(p-1)!}{p}$和$\dfrac{2(p+1)!+1}{p+2}$都是整数, 但$\dfrac{1}{p}$不是整数. 因此

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}=\frac{(p-1)!}{p}+\frac{2(p+1)!+1}{p+2}+\frac{1}{p}$$

不是整数.

即解决了问题1.82.

下面我们来解决问题1.83.

注意等式

$$\begin{aligned}\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p+1)!+1}{p+2} &= \frac{(p-1)!}{p}+\frac{(p+1)!+1}{p+2}+\frac{1}{p}\\ &= \frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p+1)!}{p+2}+\frac{1}{p+2}\\ &= \frac{(p-1)!}{p}+\frac{(p+1)!}{p+2}+\\ &\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}. \qquad (1\text{-}49)\end{aligned}$$

若$p$ 是素数但$p+2$ 不是素数, 则(1-49)中$\frac{1}{p+2}$ 不是整数.

若$p+2$是素数但$p>1$不是素数, 则(1-49)中$\frac{1}{p}$ 不是整数.

若$p$和$p+2$都不是素数且$p>1$, 则(1-49)中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$ 不是整数.

即解决了问题1.83.

## 1.26 Smarandache素数等式猜想

Smarandache提出了以下猜想:

对任意$k\geq 2$的整数, Diophantine等式

$$y=2x_1x_2\cdots x_k+1$$

有无穷多个解, 其中$y$和$x_i$都是素数, $i=1,2,\cdots,k$.

该猜想看起来是正确的, 但还有待进一步研究. 因为众所周知, 素数分布中还有许多具体问题尚未解决.

因2是最小的素数, 故我们考虑该问题的一种特殊情况, 即研究

$$p_m=p_1p_2\cdots p_n+1$$

的解, 其中$p_1=2$, $p_1<p_2<\cdots<p_n$, $m>n$.

由计算知前几个值为:

$$2+1=3,$$

$$2\times 3+1=7,$$

$$2\times3\times5+1=31,$$

$$2\times3\times5\times7+1=211,$$

$$2\times3\times5\times7\times11+1=2311,$$

易见这几个值都是素数, 但这只是特殊情况.

**问题1.84:** 找出所有$n$值使得等式

$$p_m=p_1p_2\cdots p_n+1 \tag{1-50}$$

成立, 其中$p_i$是素数, $i=1,2,\cdots,n$, 且$m>n$.

**问题1.85:** 求当$m=2n$, $m=n^2$, $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$时, 上述方程的所有解.

**问题1.86:** 求

$$y^2=2x_1x_2\cdots x_k+1 \tag{1-51}$$

的所有解, 其中$k$为使得$x_1x_2\cdots x_k$乘积最小的正整数. 并讨论对任意的正整数$k$, 该方程是否存在解.

## 1.27 Smarandache级数

Smarandache提出了以下问题:

序列

$$ap_n+b$$

存在多少个素数, 其中$(a,b)=1$且$p_n$为第$n$个素数.

**猜想1.9:** 该序列族的每一个元素含有无穷多个素数.

**问题1.87:** 序列

$$a^n+b$$

中存在多少个素数, 其中$(a,b)=1$, 且$a$不属于集合$\{-1,0,1\}$.

这个问题类似于著名的Dirichlet定理.

**猜想1.10:** 当$a+b$是奇数时, 该序列族的每一个元素含有无穷多个素数. 如果素数$p$属于该序列, 根据费马欧拉定理, 必存在无穷多个数是素数$p$的倍数. 但该集合不是由素数$p$的所有倍数构成的集合.

**问题1.88:** 序列
$$n^n+1\text{和}n^n-1$$
中存在多少个素数, 其中$n=1,2,3,\cdots$.

**注:** 当$n=2$时, 易知$n^n-1$仅含有一个素数. 若$n$是奇数, 则$n^n-1$是偶数; 若$n$是偶数, 则$n^n-1$可分解为
$$n^n-1=(n^{\frac{n}{2}}+1)(n^{\frac{n}{2}}-1).$$

## 1.28 Smarandache Counter

**定义1.48:** Smarandache Counter$C(a,b)$表示数$a$在数$b$中出现的次数.

Smarandache曾提出计算$C(1,p_n),C(1,n!),C(i,n^i)$的值, 其中$p_n$是第$n$个素数.

对于Smarandache Counter, 我们很容易证明下面的式子:
$$\sum_{1\le i\le 9}C(i,m)=[\log_{10}m]+1;$$
$$1\le C(1,p_n)+C(3,p_n)+C(7,p_n)+C(9,p_n),$$
其中$p_n$是第$n$个素数.

## 1.29 Smarandache函数$C(n)$

**定义1.49:** $C(n)$为最大的正整数$m\le n-2$使得$n\ |C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$. 即就是$C(n)=\max\{m:\ m\le n-2,\ n|\ C_n^m\}$, 并规定$C(1)=C(2)=1$.

关于新定义的Smarandache函数$C(n)$, 很少有人对其进行研究. 李梵蓓利用初等及解析方法研究了该函数的某些性质, 并得出以下结论(该结论将发表于《纯粹数学与应用数学》):

(a) 对于任意给定的正整数$k > 2$, 一定存在正整数$n$使得

$$n - C(n) \geq k.$$

(b) 对于任意正整数$n \geq 4$, 有渐近公式

$$C(n) = n + O\left(\exp\left(\frac{c_1 \cdot \ln n}{\ln\ln n}\right)\right),$$

其中$\exp(y) = e^y$, $c_1 > 0$是一个常数.

(c) 对于任意实数$N \geq 4$, 有渐近公式:

$$\sum_{n \leq N} C(n) = \frac{1}{2} \cdot N^2 + O\left(N \cdot \ln N\right).$$

## 1.30 Smarandache函数$G(n)$

张文鹏教授新定义了一个函数Smarandache函数$G(n)$如下:

**定义1.50:** $G(n)$表示最小的正整数$m$使得$n \mid \prod\limits_{k=1}^{m} \phi(k)$, 即$G(n) = \min\{m:\ n \mid \prod\limits_{k=1}^{m} \phi(k),\ m \in N\}$, 其中$\phi(n)$是欧拉函数.

对于新定义的函数$G(n)$, 付静和王妤[36]研究了该函数的基本性质并得出以下三个结论:

**定理1.15:** 对任意的素数$p$, 有

$$G(p) = \min\{p^2,\ q(p,\ 1)\};$$

$$G(p^2) = q(p,\ 2), \text{若} q(p,\ 2) < p^2; G(p^2) = p^2, \text{若} q(p,\ 1) < p^2 < q(p,\ 2);$$

$$G(p^2) = q(p,\ 1), \text{若} p^2 < q(p,\ 1) < 2p^2; G(p^2) = 2p^2, \text{若} q(p,\ 1) > 2p^2,$$

其中$q(p,\ i)$是算术级数$\{np+1\}$中第$i$个素数.

**定理1.16:** $G(n)$是Smarandache可乘函数, 且Dirichlet级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)}{n^2}$$

发散.

**定理1.17:** 设$k\geq 2$是给定的正整数, 则对任意整数组$(m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k)$, 我们有不等式

$$G(m_1m_2\cdots m_k)\leq G(m_1)G(m_2)\cdots G(m_k).$$

**证明:** 首先我们证明定理1.15.

令$G(p)=m$, 由$G(n)$的定义可知$p|\prod_{k=1}^{m}\phi(k)$, $p\nmid\prod_{k=1}^{s}\phi(k)$, $0<s<m$. 若$m$的素因子分解式是$m=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_r^{\alpha_r}$, 则$\phi(m)=q_1^{\alpha_1-1}(q_1-1)q_2^{\alpha_2-1}(q_2-1)\cdots q_r^{\alpha_r-1}(q_r-1)$, 根据$G(n)$的定义可得$p$整除$\phi(q_i^{\alpha_i})$之一, $1\leq i\leq r$. 故$p\mid q_i^{\alpha_i-1}$或者$p\mid q_i-1$. 下面我们分两种情况进行讨论:

(i) 若$p|q_i-1$, 则$m=q_i=lp+1$是算术级数$\{kp+1\}$中最小的素数.

(ii) 若$p|q_i^{\alpha_i-1}$, 则$\alpha_i=2$, $m=q_i^2=p^2$.

结合(i)和(ii)可知$G(p)=\min\{p^2,lp+1\}$, 其中$lp+1$是算术级数$\{kp+1\}$中的最小素数.

同理, 我们可以得出$G(p^2)$的计算公式.

于是完成了定理1.15的证明.

下面我们来证明定理1.16.

对任意正整数$n>1$, 设$n$的素因子分解式是$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots\ p_r^{\alpha_r}$, $G(p_i^{\alpha_i})=m_i, 1\leq i\leq r$, $m=\max\{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_r\}$, 则由$G(n)$的定义我们有$p_i^{\alpha_i}\mid\phi(1)\phi(2)\cdots\phi(m_i)$, 其中$1\leq i\leq r$. 故$p_i^{\alpha_i}\mid\phi(1)\phi(2)\cdots\phi(m)$. 因为$(p_i,\ p_j)=1$, $i\neq j$, 于是有$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\mid\phi(1)\phi(2)\cdots\phi(m)$. 因此, $G(n)=m=\max\{G(p_1^{\alpha_1}),\ G(p_2^{\alpha_2}),\ \cdots,\ G(p_r^{\alpha_r})$. 即证明了$G(n)$是Smarandache可乘函数.

根据定理1.15我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)}{n^2}>\sum_{p}\frac{G(p)}{p^2}>\sum_{p}\frac{1}{p}=\infty.$$

故Dirichlet级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)}{n^2}$发散.

最后, 我们来证明定理1.17.

首 先 我 们 证 明 对 任 意 正 整 数$m_1$和$m_2$, 不 等 式$G(m_1m_2) \leq G(m_1)G(m_2)$成立.

设$G(m_1)=u$, $G(m_2)=v$, 根据$G(n)$定义我们很容易得到

$$m_1 \mid \prod_{i=1}^{u}\phi(i)\ ,\ m_2 \mid \prod_{i=1}^{v}\phi(i).$$

不失一般性, 我们假设$u \leq v$, 则

$$\prod_{k=1}^{uv}\phi(k)=\prod_{k=1}^{u}\phi(k)\cdot\prod_{k=u+1}^{uv}\phi(k)=\prod_{k=1}^{u}\phi(k)\cdot\phi(u+1)\cdots\phi(v)\cdots\phi(2v)\cdots\phi(uv).$$

注意到

$$\phi(2)|\phi(2v),\ \phi(3)|\phi(3v),\ \cdots,\ \phi(u)|\phi(uv),\ \phi(u+1)|\phi(u+1),\ \cdots,\ \phi(v)|\phi(v),$$

这意味着

$$\prod_{i=1}^{v}\phi(i) \Big| \prod_{k=u+1}^{uv}\phi(k),$$

或者

$$\prod_{i=1}^{u}\phi(i)\prod_{i=1}^{v}\phi(i) \mid \prod_{k=1}^{uv}\phi(k).$$

因此

$$m_1m_2 \mid \prod_{k=1}^{uv}\phi(k).$$

由$G(n)$的定义我们可知$G(m_1m_2) \leq uv$, 或者

$$G(m_1m_2) \leq G(m_1)G(m_2).$$

若$k \geq 3$, 运用上述结论我们有

$$\begin{aligned} G(m_1m_2\cdots m_k) &= G(m_1(m_2\cdots m_k)) \leq G(m_1)G(m_2\cdots m_k) \\ &\leq G(m_1)G(m_2)G(m_3\cdots m_k) \\ &\leq G(m_1)G(m_2)\cdots G(m_k). \end{aligned}$$

## 1.31 未解决的Smarandache问题1

**定义1.51:** 所有整数序列$\{a_n\}_{n\in N}$定义如下:

(a) $\forall i\in N,\exists j,k\in N,i\neq j\neq k,$使得$a_i\equiv a_j(\mathrm{mod a_k})$.

(b) $\forall i\in N,\exists j,k\in N,i\neq j\neq k,$使得$a_j\equiv a_k(\mathrm{mod a_i})$.

**问题1.89:** Smarandache提出, 寻找所有的整数序列$\{a_n\}_{n\in N}$使得

$$\forall i\in N,\ \exists j,\ k\in N,\ i\neq j\neq k,\ \ a_i\equiv a_j(\mathrm{mod a_k}).$$

**结论:** 令

$$a_1\equiv a_5(\mathrm{mod a_3}),\mathrm{a_3}\equiv \mathrm{a_7}(\mathrm{mod a_5}),\mathrm{a_5}\equiv \mathrm{a_9}(\mathrm{mod a_7}),\cdots,$$

$$a_2\equiv a_6(\mathrm{mod a_4}),\mathrm{a_4}\equiv \mathrm{a_8}(\mathrm{mod a_6}),\mathrm{a_6}\equiv \mathrm{a_{10}}(\mathrm{mod a_8}),\cdots.$$

且存在无穷多种方式可组成序列$\{a_n\}_{n\in N}$.

## 1.32 未解决的Smarandache问题2

**问题1.90:** Smarandache提出: 能否构造一个函数使其包含所有的无理数或者超越数.

**注:** 若要构造该函数, 我们必须清楚所有无理数构成的集合比所有自然数构成的集合要多. 因此我们所构造的这个函数应有如下形式:

$$F(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数};\\ 0, & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

或找出函数

$$G(x)=\{x:\ G(x)=0,\text{当}x\text{为有理数}\}.$$

例如令

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\cos 2(n!x)$$

和

$$G(x) = ax + b,$$

其中$\forall a, b \in Z$.

## 1.33 未解决的Smarandache问题3

**定义1.52:** Smarandache循环序列定义如下:

$$1, 12, 21, 123, 231, 312, 1234, 2341, 3412, 4123, 12345, \cdots.$$

**问题1.91:** Smarandache提出研究该序列中有多少个元素是素数.

**问题1.92:** 该序列中存在多少个元素可以表示为整数的方幂?

**猜想1.11:** 该序列中不存在整数方幂形式的数.

## 1.34 未解决的Smarandache问题4

**定义1.53:** 定义

$$d_n = \frac{p_{n+1} - p_n}{2},$$

其中$p_n$是第$n$个素数.

**问题1.93:** 序列$d_n$是否含有无穷多个素数.

**问题1.94:** 序列$d_n$中是否含有$n!$或$n^n$形式的数.

**问题1.95:** 序列$d_n$中是否存在整数$n$使得$d_n = 2k, \forall k \in N$.

**问题1.96:** 序列$d_n$中是否存在整数$n$和$i$使得$p_{n+i} - p_n = 2k, \forall k \in N$.

**问题1.97:** 序列$d_n$的分布如何. 这个问题是否能引出素数分布定理的某些新形式或者该分布是素数定理$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{n\log n} = 1$的结论.

## 1.35 未解决的Smarandache问题5

**定义1.54:** 令$k, n_i \in N, k < n_i$, 定义整数序列如下:

$$n_0 = n, n_{i+1} = \max\{p :\ p|n_i - k,\ p\text{是素数}\}$$

例如, 若$n_0 = 10$, 则有

$$n_1 = 10 - 3, n_2 = 7 - 2, n_3 = 5 - 2, n_4 = 3 - 1,$$

且当$i \geq 5$时, $n_i$不存在. 概括而言该序列的长度是比$n_0$小的素数个数加1, 这很容易证明.

若$n_1$是比$n_0$小的最大素数, $n_2$是比$n_1$小的最大素数, 依次类推. 当$n_0$是素数时, 该序列的长度是不超过$n_0$的素数个数. 当$n_0$是合数时, 则为比$n_0$小的素数个数加1.

**问题1.98:** *令$k, n_i \in N, k < n_i$, 定义序列:*

$$n_0 = n, n_{i+1} = \max\{p:\ p|\frac{n_i}{k},\ p\text{是素数}\}.$$

*研究该序列是否存在无穷多个数.*

**结论:** 若$n_0 = 20$, 则$n_1 = 5, n_2 = 5, n_3 = 5, \cdots$. 因此对于该序列而言, 可能会形成一个无限环, 即有$n_1$是$n_0$的最大素因子且$n_i = n_1, \forall i \geq 2$.

**问题1.99:** *研究序列:*

$$n_0 = n, n_{i+1} = \max\{p:\ p|n_i + k,\ p\text{是素数}\},$$

*其中$k, n \in N, 1 \leq k \leq n$.*

**问题1.100:** *研究序列:*

$$n_0 = n, n_{i+1} = \max\{p:\ p|n_i k,\ p\text{是素数}\},$$

*其中$k, n \in N, 1 \leq k \leq n$.*

## 1.36 未解决的Smarandache问题6

**问题1.101:** *寻求方程*

$$xa^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}a^x = 2a \tag{1-52}$$

*的所有解, 其中$a \in Q \setminus \{-1, 0, 1\}$.*

**注:** 张文鹏[37]教授完全解决了该问题并进行了更进一步的研究, 具体的说就是证明了下面的:

**定理1.18:** 对任意的$a \in Q \setminus \{-1, 0, 1\}$, 方程(1-52)成立当且仅当$x = 1$.

**定理1.19:** 设$R$为所有实数的集合. 对任意的$a \in R \setminus \{-1, 0, 1\}$, 方程

$$x \cdot a^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot a^x = 2a$$

有且只有一个整数解$x = 1$; 如果$a > 0$, 那么方程有且只有一个实数解$x = 1$.

**证明:** 首先我们用数学分析中的Rolle's定理来证明定理1.18.

我们先证明当$a > 1$时方程(1-52)成立. 事实上, 若$x$是方程(1-52)的解, 则$x > 0$. 利用不等式$|u| + |v| \geq 2\sqrt{|u| \cdot |v|}$我们有

$$x \cdot a^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}a^x \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot a^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x}a^x} = 2 \cdot a^{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}} \geq 2a,$$

故当且仅当$x = 1$时方程(1-52)成立. 即就是当$a > 1$时方程有唯一的正整数解$x = 1$.

现在我们考虑$0 < a < 1$时的情况. 设$x_0$是方程(1-52)的任意整数解, 则由方程(1-52)知$x_0 > 0$. 下面我们用反证法证明$x_0 = 1$. 假设$x_0 \neq 1$, 令$0 < x_0 < 1$, 则$\frac{1}{x_0} > 1$. 我们定义函数$f(x)$如下:

$$f(x) = xa^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}a^x - 2a.$$

易见$f(x)$在闭区间$\left[x_0, \dfrac{1}{x_0}\right]$上是连续函数, 在开区间$\left(x_0, \dfrac{1}{x_0}\right)$是可导函数且$f(x_0) = f(\dfrac{1}{x_0}) = f(1) = 0$. 根据数学分析中的Rolle's定理, 我们可知$f'(x)$在开区间$\left(x_0, \dfrac{1}{x_0}\right)$上有两个零点, 且$f''(x)$在此开区间上有一个零点. 但由$f(x)$的定义可知当$x \in \left(x_0, \dfrac{1}{x_0}\right)$时,

$$f'(x) = a^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \cdot a^{\frac{1}{x}} \cdot \ln a - \frac{1}{x^2} \cdot a^x + \frac{1}{x} \cdot a^x \cdot \ln a$$

及

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^3}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln^2 a+\frac{2}{x^3}\cdot a^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln a-\frac{1}{x^2}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln a \\ &\quad +\frac{1}{x}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln^2 a \\ &= \frac{1}{x^3}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln^2 a+\frac{2}{x^3}\cdot a^{\frac{1}{x}}+\frac{2}{x^2}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln^2 a>0, \end{aligned}$$

其中$0<a<1$, $\ln\dfrac{1}{a}>0$, 这与在开区间$\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$中$f''(x)$必有一个零点相矛盾. 这就证明了当$0<a<1$时的情况.

当$a<0$且$a\neq -1$时, 如果方程(1-52)有整数解$x$, 那么$|\ x\ |$必须是奇数, 因为负数没有实的平方根. 因此在这种情况下, 方程(1-52)就是下面的方程:

$$\begin{aligned} 2\mid a\mid &= -2a=-x\cdot a^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot a^{x}=-x\cdot(-1)^{\frac{1}{x}}\cdot\mid a\mid^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot(-1)^{x}\cdot\mid a\mid^{x} \\ &= x|a\mid^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot\mid a\mid^{x} \end{aligned}$$

从上面的结论我们知道定理1.18成立. 这就完成了定理的证明.

类似定理1.18的证明我们易证定理1.19.

**问题1.102:** 寻求方程

$$xb^{\frac{1}{x}}\cos\{\frac{(2n-1)\pi}{x}\}+\frac{1}{x}b^{x}\cos\{(2n-1)\pi x\}=-2b$$

的所有解.

## 1.37 未解决的Smarandache问题7

**问题1.103:** 令$n$是任意正整数, $d(n)$是$n$的所有正因数的个数. Smarandache提出寻找

$$d(d(\cdots d(n)\cdots))=d^{k}(n)=2 \tag{1-53}$$

最小正整数解$k$.

**注:** 若$n$是任意的素数, 则有$d(n)=2$. 又因$d(2)=2$, 故此时$d^k(n)=2$的最小正整数解是$k=2$. 因此方程(1-53)最小的正整数解可能是$k=2$.

## 1.38 未解决的Smarandache问题8

**定义1.55:** 定义$\{a_n\}$是正整数的严格递增序列, $N(n)$是序列中不超过$n$的元素个数.

Smarandache提出以下问题:

**问题1.104:** 给定正整数$m$, 当$\{a_n\}$是$m$次方幂的序列时, 即$\{a_n\}$为$0$, $1$, $2^m$, $3^m$, $\cdots$. 对于给定的正整数$n$, 寻求最小的数$k$使得$N^k(n)$是一个常数.

**猜想1.12:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\log_m(\log_2 n)}=1.$$

## 1.39 未解决的Smarandache问题9

Smarandache提出以下猜想:

**猜想1.13:** 对$\forall k\in N, p, q, x, y>1$, 方程

$$x^p-y^q=k \tag{1-54}$$

有有限个解.

**注:** 例如, $x^3-y^5=7$也可写为如下形式:

$$(x-2)(x^2+2x+4)=(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1).$$

方程(1-54)实际上是分割域的素数分解问题.

## 1.40 未解决的Smarandache问题10

**问题1.105:** 寻求最大的值$r$使得集合$\{1,2,3,\cdots,r\}$被划分为$n$个类且没有一个类包含数$x,y,z$, 其中$x\neq y\neq z, x+y=z$.

**注:** 解决该问题的关键是先从问题中类的定义着手. 例如, 若我们考虑模10的情况, 则任何一个集合都能被划分为如下10个子集:$\{x \equiv 0(\mathrm{mod}\ \}, \{x \equiv 1(\mathrm{mod}\ 10)\}, \cdots$, 且根据乘法的定义我们有

$$1 \times 11 = 11, 5 \times 15 = 75, 6 \times 19 = 96, 10 \times 20 = 400.$$

通过以上计算我们得出对于这种情况必有$r = 74 = 5 \times 15 - 1$.

**问题1.106:** 若我们对数关于模$n$进行分类, 讨论问题1.105.

**问题1.107:** 当$x \neq y \neq z, x + y = z$时, 讨论问题1.105.

**注:** 对问题1.106, 当$n$是素数时, 许多学者对此很感兴趣. 例如, 若$n = 5$, 则这些类是

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \},$$

且

$$5 \times 10 = 50, 6 \times 11 = 66.$$

故$r = 49 = 50 - 1$.

对问题1.107, 若我们对自然数关于模10进行分类, 则有$10 + 20 = 30$, 故$r = 29 = 30 - 1$.

还可研究$n$是素数时问题1.107的情况.

## 1.41 未解决的Smarandache问题11

**定义1.56:** 定义$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$是由无穷多个整数组成的序列且序列中任意三个数都不能构成一个算术级数.

Smarandache提出了下面的问题:

**问题1.108:** 不等式$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq 2$是否成立.

**注:** 在这里Kenichiro Kashihara博士指出我们很容易出现一个简单的错误, 即就是我们可能会认为$a_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$是一个反例, 其实不然.

首先该序列的前几项为:

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, \cdots.$$

其次易见序列中$(1,4,7),(2,29,56)$及$(7,37,67)$都是三元的算术级数,因此$a_n=\dfrac{n^2-n+2}{2}$不是一个反例. 错误出现在我们假定了这样的条件:算术级数中不存在三个相邻的数.

我们还可以研究以下的例子:

$$a_1=1, a_{2n}=2a_{2n-1}, a_{2n+1}=a_{2n}+2.$$

它的前几个值是: $1,2,4,8,10,20,22,44,46,92,94,\cdots$.

该序列中是否含有可构成一个算术序列的三个元素?若不存在, 可同序列$b_n=2^{n-1}$比较. 易知$b_n=2^{n-1}$的前几个值为:

$$1,2,4,8,16,32,64,\cdots,$$

且$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=2$.

**问题1.109:** Smarandache如何想到问题1.109?他是否考虑过序列$a_n=2^{n-1}$或序列

$$a_1=1, a_{n+1}=a_1\times\cdots\times a_n+1.$$

**注:** 序列$a_1=1, a_{n+1}=a_1\times\cdots\times a_n+1$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=2. \tag{1-55}$$

设$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$, 且注意到关系式$S_n+\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=2$. 根据这两点读者很容易证明等式(1-55).

## 1.42 未解决的Smarandache问题12

**定义1.57:** $e_p(n)$定义为能整除$n$的素数$p$的最大指数.

例如, 当$p=3$时, 它的前几个值是:

$$0,0,1,0,0,1,0,0,2,\cdots.$$

**问题1.110:** $e_p(n)$的期望是什么?

**结论:** 若$e_p(n)=1$, 则$p\mid n$, $p^2\dagger n$. 因此含有$\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}$个自然数. 故$e_p(n)$的期望为

$$\begin{aligned}\sum_{k\in N}k\left(\frac{1}{p^k}-\frac{1}{p^{k+1}}\right) &= \sum_{k\in N}k\left(\frac{p-1}{p^{k+1}}\right)\\ &= (p-1)\sum_{k\in N}\frac{k}{p^{k+1}}\\ &= \frac{p-1}{(p-1)^2}\\ &= \frac{1}{p-1}.\end{aligned}$$

根据上式知, $p$越大$e_p(n)$越小.

**问题1.111:** 由$e_p(n),e_q(n),\cdots$表示的$e_m(n)$的值是什么? 其中$m=p\times q\times\cdots$.

**结论:** 我们首先考虑$(p,q)=1$和$(p,q)\neq 1$的情况, 此时有

$$\min\{e_p(n),e_q(n)\}=e_{pq}(n).$$

故

$$\min\{e_p(n),e_q(n),\cdots\}=e_m(n).$$

## 1.43 未解决的Smarandache问题13

Smarandache曾提出如下问题:

**问题1.112:** 寻求方程

$$x^y-[x]=y \tag{1-56}$$

的所有实数解, 其中$[x]$是不超过$x$的最大正整数.

对问题1.114, Smarandache并未完全解决. 例如以下情况尚未讨论:

(a) $y \in \frac{R}{Q}$,

(b) $y = \frac{m}{n} \in \frac{Q}{Z}$.

**注:** Smarandache指出若$y$是大于1的奇数, 则有

$$x = (y+1)^{\frac{1}{y}}. \tag{1-57}$$

对于此情况, 等式(1-57)不受限制. 因若$y > 0$, 则有

$$y + 1 < (1+1)^y = 2^y.$$

故将等式(1-57)代入方程(1-56), 于是有

$$x^y - [x] = (y+1)^{\frac{y}{y}} - \lfloor (y+1)^{\frac{1}{y}} \rfloor = y + 1 - 1 = y. \tag{1-58}$$

等式(1-58)表明当$0 < y \in R$时, 方程(1-56)的解为$x = (y+1)^{\frac{1}{y}}$. 但当$y < 0$时, 因为要考虑到复数, 所以寻求方程(1-56)的解会比较困难, 这有待我们进一步讨论.

**问题1.113:** 寻求方程$x^y - [x]^y = y$的所有实数解.

**问题1.114:** 寻求方程$x^y - [x]^y = x$的所有实数解.

**问题1.115:** 寻求方程$x[y] - [x]y = |x - y|$的所有实数解.

**问题1.116:** 寻求方程$x^{[y]} - y^{[x]} = |x - y|$的所有实数解.

**注:** 尚松叶运用初等方法证明了问题1.115, 即下面的(所做文章已被《郑州大学学报》录用):

**定理1.20:** 方程

$$x[y] - [x]y = |x - y|$$

的所有实数解具有如下三种形式:

$(I)$ 平凡实数解为 $x = y = a,\ a \in R,\ R$表示实数集合;

$(II)$ 绝对值较小的非平凡实数解为

$$\begin{cases} x = (-1)^i + r_x, \\ y = (-1)^i + r_y. \end{cases}$$

其中$r_x$，$r_y \in [0,\ 1)$，当$r_x > r_y$时，$i = 0$, 当$r_x < r_y$时，$i = 1$;

$(III)$ 绝对值较大的非平凡实数解为

$$\begin{cases} x = mq + (-1)^i + r_x, \\ y = mp + (-1)^i \frac{p}{q}\left[1 + (-1)^i r_x\right]. \end{cases}$$

其中 $p$, $q$, $m \in Z$, $(p,\ q) = 1$, $r_x \in [0,\ 1)$, $Z$表示整数集合, 当$p < q$时, $i = 0$; 当$p > q$时, $i = 1$.

**证明:** 现在我们利用初等方法及Gauss取整函数$[x]$的性质来完成定理的证明.

(1) $x = y = a$, $a \in R$显然是方程的平凡实数解.

(2) 当$x \neq y$时，用$r_x$，$r_y$分别表示$x$及$y$的小数部分, 则$r_x$，$r_y \in [0,\ 1)$且$r_x \neq r_y$. 否则，若$r_x = r_y = r$，$0 \leq r < 1$, 则$x = [x] + r$, $y = [y] + r$.

所以

$$([x] + r)[y] - [x]([y] + r) = \mid [x] - [y] \mid .$$

$$r([y] - [x]) = \mid [x] - [y] \mid .$$

若$r = 0$，则$[x] = [y]$,从而$x = y$, 与$x \neq y$矛盾.

若$r > 0$，则$r([y] - [x]) = [y] - [x]$.

从而

$$([y] - [x])(1 - r) = 0.$$

又$r \neq 1$，所以$[y] = [x]$, 从而$x = y$,与$x \neq y$矛盾，故$r_x \neq r_y$.

记$x = [x] + r_x$, $y = [y] + r_y$，$r_x$, $r_y \in [0,\ 1)$.

(a) 当$x > y$时,

$$x[y] - [x]y = x - y$$

或

$$x([y] - 1) = y([x] - 1).$$

显然$x = 1 + r_x$, $y = 1 + r_y$, $0 \leq r_y < r_x < 1$是方程的解.

当$y \neq 0$且$[y]-1 \neq 0$时, $\frac{x}{y}=\frac{q}{p}$, $(p,\ q)=1,\ q>p,\ p,\ q \in Z$. 则

$$\frac{[x]-1}{[y]-1}=\frac{q}{p}.$$

所以

$$q \mid [x]-1,\ p \mid [y]-1.$$

令$[x]=mq+1,\ [y]=np+1,\ m,\ n \in Z$, 则

$$\frac{[x]-1}{[y]-1}=\frac{q}{p}=\frac{mq}{np},$$

从而$m=n$, $x=mq+1+r_x,\ y=mp+1+r_y$.
所以

$$\frac{x}{y}=\frac{mq+1+r_x}{mp+1+r_y}=\frac{q}{p},$$

$$p(mq+1+r_x)=q(mp+1+r_y),$$

$$p(1+r_x)=q(1+r_y),$$

$$r_y=\frac{p}{q}(1+r_x)-1.$$

即

$$\begin{cases} x=mq+1+r_x, \\ y=mp+\dfrac{p}{q}(1+r_x). \end{cases}$$

其中$(p,\ q)=1,\ q>p,\ p,\ q,\ m \in Z,\ r_x \in [0,\ 1)$.
故当$x>y$时, 原方程的解为:

$$x=1+r_x,\ y=1+r_y,\ 0 \leq r_y<r_x<1,$$

或

$$\begin{cases} x=mq+1+r_x, \\ y=mp+\dfrac{p}{q}(1+r_x). \end{cases}$$

其中$(p,\ q)=1,\ q>p,\ p,\ q,\ m \in Z$, $r_x \in [0,\ 1)$.

从而完成了(II), (III)中$i=0$时的结论.

(b) 当$x<y$时, 有

$$x[y]-[x]y=y-x$$

或

$$x([y]+1)=y([x]+1).$$

显然$x=-1+r_x,\ y=-1+r_y$，$0\le r_x<r_y<1$是方程的解.

当$y\neq 0$且$[y]+1\neq 0$时, $\frac{x}{y}=\frac{q}{p},\ (p,\ q)=1,\ p>q,\ p,\ q\in Z$, 则

$$\frac{[x]+1}{[y]+1}=\frac{q}{p}.$$

所以

$$q\mid [x]+1,\quad p\mid [y]+1.$$

令$[x]=mq-1,\ [y]=mp-1,\ m\in Z$, 于是有

$$x=mq-1+r_x,\ y=mp-1+r_y.$$

从而

$$\frac{x}{y}=\frac{mq-1+r_x}{mp-1+r_y}=\frac{q}{p},$$

$$p(mq-1+r_x)=q(mp-1+r_y),$$

$$p(1-r_x)=q(1-r_y),$$

$$r_y=1-\frac{p}{q}(1-r_x).$$

因此

$$\begin{cases} x=mq-1+r_x,\\ y=mp-\dfrac{p}{q}(1-r_x). \end{cases}$$

其中$(p,\ q)=1,\ p>q,\ p,\ q,\ m\in Z,\ r_x\in[0,\ 1)$.

故当$x<y$时, 原方程的解为:

$$x=-1+r_x,\ y=-1+r_y,\ 0\le r_x<r_y<1,$$

或

$$\begin{cases} x=mq-1+r_x,\\ y=mp-\dfrac{p}{q}(1-r_x), \end{cases}$$

其中$(p,\ q)=1,\ p>q,\ p,\ q,\ m\in Z,\ r_x\in[0,\ 1)$.

于是完成了(II), (III)中$i=1$时的结论.

结合(1)(2)完成了定理的证明.

## 1.44 未解决的Smarandache问题14

**定义1.58:** 对任意的正整数$n$, Smarandache素数基SPB$(n)$表示使得$\sum\limits_{i=0}^{n}a_ip_i=n$的二进制串$(a_na_{n-1}\cdots a_0)$. 其中$p_0=1,\ i\geq 1,\ p_i$是第$i$个素数,

$$a_i=\begin{cases}1, & \text{表示第}i\text{个素数}p_i;\\ 0, & \text{表示第}i\text{个素数未出现}.\end{cases}$$

例如

$$\mathrm{SPB}(2)=10=2+0,\mathrm{SPB}(3)=11=2+1.$$

$\mathrm{SPB}(14)=1000001=13+1$,而不是$1000100=11+3$ 或$11010=7+5+2$.

它的前几个值是:

$$0,1,10,100,101,1000,1001,10000,10001,10010,10100,\cdots.$$

**问题1.117:** 对任意正整数, SPB$(n)$都存在.

Smarandache对其进行了证明, 证明过程如下:

**证明:** 我们知道对任意的正整数$n>1$, 存在素数$p_n$和$p_{n+1}$使得$p_n\leq n<p_{n+1}$. 下面我们用上述结论和数学归纳法对问题1.119进行证明.

首先易见2和3都是素数.

其次, 对任意正整数$n$, 存在素数$p_n$和$p_{n+1}$使得$p_n\leq n<p_{n+1}$, 于是$n=p_n+r_1$.

对于$r_1$, 也存在素数$p_m$和$p_{m+1}$使得$p_m\leq n<p_{m+1}$, 于是$r_1=p_m+r_2$, $m<n$.

如此继续下去, 直到存在一个$j$使得$r_j=0$.

故对于任意的正整数$n$, SPB$(n)$都存在.

**问题1.118:** 第$n$项含有多少个数?

**注:** 由问题1.117的讨论, 我们知若$p_k< n <p_{k+1}$, 则SPB($n$)有$k+1$个数. 因此这个问题与小于等于$n$的素数的个数有关.

**问题1.119:** 有多少个数是以1作为末位数的? 1作为末位数和0作为末位数哪个比例较高?

# 第二章　伪Smarandache函数

## 2.1　引言

Kenichiro Kashihara博士类比于数论中的Smarandache函数, 新定义了一个伪Smarandache函数$Z(n)$. 该函数与Smarandache函数有很多相似之处. 对该函数提出的许多问题, 可在C.Ashbacher编著的Smarandache函数一书中找到类似问题.

请仔细阅读这一章, 你会发现伪Smarandache函数许多有趣的性质.

首先我们回顾一下Smarandache函数的定义:

**定义2.1:** 对任意正整数$n$, Smarandache函数$S(n)$定义最小的正整数$m$使得$n|m!$, 即$S(n)=\min\{m:\ n|m!,\ m\in N\}$.

因为伪Smarandache与Smarandache函数相似, 故其也有类似定义, 只不过它用和式代替了阶乘, 即下面的:

**定义2.2:** 对任意正整数$n$, 伪Smarandache函数$Z(n)$定义为最小的正整数$m$使得$n\mid\sum\limits_{k=1}^{m}k$.

当$1\le n\le 60$时, $Z(n)$的值可见如下图表:

| $n$ | $Z(n)$ | $n$ | $Z(n)$ | $n$ | $Z(n)$ | $n$ | $Z(n)$ | $n$ | $Z(n)$ | $n$ | $Z(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 10 | 21 | 6 | 31 | 30 | 41 | 40 | 51 | 17 |
| 2 | 3 | 12 | 8 | 22 | 11 | 32 | 63 | 42 | 20 | 52 | 39 |
| 3 | 2 | 13 | 12 | 23 | 22 | 33 | 11 | 43 | 42 | 53 | 52 |
| 4 | 7 | 14 | 7 | 24 | 15 | 34 | 16 | 44 | 32 | 54 | 27 |
| 5 | 4 | 15 | 5 | 25 | 24 | 35 | 14 | 45 | 9 | 55 | 10 |
| 6 | 3 | 16 | 31 | 26 | 12 | 36 | 8 | 46 | 23 | 56 | 48 |
| 7 | 6 | 17 | 16 | 27 | 26 | 37 | 36 | 47 | 46 | 57 | 18 |
| 8 | 15 | 18 | 8 | 28 | 7 | 38 | 19 | 48 | 32 | 58 | 28 |
| 9 | 8 | 19 | 18 | 29 | 28 | 39 | 12 | 49 | 48 | 59 | 58 |
| 10 | 4 | 20 | 15 | 30 | 15 | 40 | 15 | 50 | 24 | 60 | 15 |

下面我们给出几个相关函数的定义:

**定义2.3:** 我们定义一个新的算术函数$U(n)$如下: $U(1)=1$. 当$n>1$且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$为$n$的标准素因数分解式时,

$$U(n)=\max\{\alpha_1p_1,\ \alpha_2p_2,\ \cdots,\ \alpha_sp_s\}.$$

这个函数有时也被称为Smarandache可乘函数.

**定义2.4:** 定义$S_c(n)$定义为最大的正整数$m$使得$y|n!$, 其中$y$为整数且$1\le y\le m$, 即$S_c(n)=\max\{m:\ y|n!, 其中1\le y\le m, 且m+1\dagger n!\}$.

**定义2.5:** 对任意正整数$n$, 著名的伪Smarandache无平方因子函数$Zw(n)$定义为最小的正整数$m$使得$n\mid m^n$, 即就是$Zw(n)=\min\{m: m\in N,\ n|m^n\}$.

**定义2.6:** Euler函数$\phi(n)$表示不超过$n$且与$n$互素的正整数的个数.

## 2.2 伪Smarandache函数的基本定理

我们先给出关于伪Smarandache函数$Z(n)$的一些基本定理, 以便大家对它进行更好的研究.

**定理2.2.1:** 对任意正整数$n$, 我们有伪Smarandache函数$Z(n)\ge 1$.

**证明:** 这个结论可以由定义直接得到.
注意到当且仅当$n=1$时, 有$Z(n)=1$.

**定理2.2.2:** 对任意正整数$n$, $Z(n)<n$ 不恒成立.

**证明:** 例如: $Z(2)=3$, $Z(4)=7$, $Z(8)=15$.

**定理2.2.3:** 对任意素数$p\ge 3$, $Z(p)=p-1$.

**证明:** 令$Z(p)=m$, 其中$m$是某个正整数. 由于$\sum\limits_{k=1}^{m}k=\dfrac{m(m+1)}{2}$, 根据定义可知$m$是满足

$$p|\frac{m(m+1)}{2}$$

的最小正整数.

显然, $p$一定整除$m$或者$m+1$, 满足该条件的最小的数是$p=m+1$或者$p-1=m$, 且$p\neq 2$. 否则, 若$p=2$, 则有$Z(2)=3$.

**定理2.2.4:** 对任意素数$p\geq 3$及$k\in N$, 我们有$Z(p^k)=p^k-1$. 当$p=2$时, 则有$Z(2^k)=2^{k+1}-1$.

**证明:** 令$Z(p^k)=m$, 其中$m$是某个正整数. 由于$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}$, 根据定义可知$m$是满足

$$p^k|\frac{m(m+1)}{2}$$

的最小正整数.

显然, $p^k$一定整除$m$或者$m+1$, 满足该条件的最小的数是$p^k=m+1$或者$p^k-1=m$, 且$p\neq 2$. 否则, 若$p=2$, 则有$Z(2)=3$.

**定理2.2.5:** 对任意合数$n$, 我们有$Z(n)=\max\{Z(m),\quad m|n\}$.

**证明:** 假设$n$是合数, 此时结论即为:

$$Z(n)\geq\max\{Z(m),\quad m|n\}.$$

令$Z(n)=p$, $Z(m)=q$, 其中$m|n$. 设$q>p$, 于是有

$$n|\frac{p(p+1)}{2},\quad m|\frac{q(q+1)}{2}.$$

**定理2.2.6:** (1) $Z(n)$是不可加的, 即$Z(m+n)$不恒等于$Z(n)+Z(m)$. (2) $Z(n)$是不可乘的, 即$Z(m\cdot n)$不恒等于$Z(n)\cdot Z(m)$.

**证明:** 例如:

$$Z(2+3)=Z(5)=4\neq 5=Z(3)+Z(2),$$

$$Z(2\cdot 3)=Z(6)=3\neq 2\cdot 3=Z(2)\cdot Z(3).$$

**定理2.2.7:** 极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}$发散.

**证明:** 事实上, 根据函数$Z(n)$的定义我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)} > \sum_{p=3}^{n}\frac{1}{Z(p)} = \sum_{3\le p\le n}\frac{1}{p-1} > \sum_{3\le p\le n}\frac{1}{p}.$$

众所周知, $\sum\limits_{p}\frac{1}{p}$是发散的. 因此, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}$也是发散的.

**定理2.2.8:** 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k}$发散.

**证明:** 事实上, 根据函数$Z(n)$的定义我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k} > \sum_{p=3}^{n}\frac{Z(p)}{p} = \sum_{3\le p\le n}\frac{p-1}{p} > \sum_{3\le p\le n}\frac{1}{p}.$$

由于$\sum\limits_{3\le p\le n}\frac{1}{p}$是发散的. 因此, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k}$也是发散的.

**定理2.2.9:** 对任意$m\ge 1$, 存在某个$n\ge 1$, 使得$Z(n)=m$.

**证明:** 根据定义, 令$n=\frac{m(m+1)}{2}$即可.

## 2.3 关于伪Smarandache函数的问题

类似于Smarandache函数, 伪Smarandache函数也有许多问题值得我们研究, 下面我们将其一一列出.

**问题2.3.1:** 令$Z^2(n)=Z(Z(n))$, 一般地, $Z^k(n)=Z(Z(\cdots Z(n)\cdots))$, 这里函数$Z$重复了$k$次. 对于给定的一组整数$k$, $m\in N$, 试求满足方程$Z^k(n)=m$的所有正整数解.

**注:** 首先我们易证方程$Z^k(n)=m$的解的存在性.

运用定理2.2.9, 我们知存在数$n_0$使得$Z(n_0)=m$. 再次运用定理2.2.9, 可知存在数$n_1$, 使得$Z(n_1)=Z(n_0)$. 重复运用定理2.2.9 $k$次, 即有$Z^k(n_{k-1})=m$.

**问题2.3.2:** 考察下面的值是否有界:

(1) $|Z(n+1)-Z(n)|$,

(2) $\dfrac{Z(n+1)}{Z(n)}$.

当$Z(n)=p$, $Z(n+1)=q$时, 根据函数的定义有:

$n$整除$\dfrac{p(p+1)}{2}$, $n+1$整除$\dfrac{q(q+1)}{2}$.

(a) 若$n$是奇数, 则有$n\geq p$, $2n+1\geq q$.

(b) 若$n$是偶数, 则有$2n-1\geq p$, $n\geq q$.

(c) 若$n=p$, 这里$p$是素数, 则有$Z(n-1)\leq 2n-3$, $Z(n)=n-1$, $Z(n+1)\leq 2n+1$.

因此, 寻求上述的界是很困难的.

**注:** 郑亚妮[38]给出了该问题的研究方法及结论, 苟素和李江华[40]对问题2.3.2中的(1)也进行了讨论. 首先我们给出郑亚妮的研究方法, 即就是下面的:

**定理2.3.1:** 对足够大的任意正整数$M$, 有无穷多个正整数$n$ 满足

$$\frac{Z(n+1)}{Z(n)}>M\text{和}\ |Z(n+1)-Z(n)|>M.$$

由此可知, $|Z(n+1)-Z(n)|$ 和$\dfrac{Z(n+1)}{Z(n)}$ 是无界的.

在证明前我们要用到以下引理:

**引理2.3.1:** 令$k$和$h$ 是任意正整数且$(h,\ k)=1$, 那么在级数$nk+h$中存在无穷多个素数, 其中$n=0,\ 1,\ 2,3,\ \cdots$.

**证明:** 这是著名的Dirichlet定理, 参见文献[3].

**证明:** 现在我们利用引理来证明定理. 事实上, 对任意正整数$M$, 取$m$满足$2^m>M$. 注意到$\left(2^{2m+1},\ 2^m+1\right)=1$, 因此根据Dirichlet定理, 我们立即得到: 在级数

$$2^{2m+1}k+2^m+1,\quad \text{其中}\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

中存在无穷多个素数.

于是, 一定存在一个正整数$k_0$满足$2^{2m+1}k_0+2^m+1=P$ 是素数. 对于素数$P$, 根据$Z(n)$的定义有

$$\begin{aligned}&Z(P)=P-1=2^{2m+1}k_0+2^m,\\&Z(P-1)=Z(2^{2m+1}k_0+2^m)=Z(2^m(2^{m+1}k_0+1)).\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}k_0} i=\frac{2^{m+1}k_0(2^{m+1}k_0+1)}{2}$$

和$2^m(2^{m+1}k_0+2^m)$ 均整除 $\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}k_0} i$, 于是有

$$Z(P-1)\leq 2^{m+1}k_0.$$

因此

$$\frac{Z(P)}{Z(P-1)}\geqslant\frac{2^{2m+1}k_0+2^m}{2^{m+1}k_0}>2^m>M.$$

所以$\dfrac{Z(P)}{Z(P-1)}$无界.

同理可得

$$\begin{aligned}|Z(P)-Z(P-1)|&\geq|Z(P)|-|Z(P-1)|\\&\geq 2^{2m+1}k_0+2^m-2^{m+1}k_0\\&=2^{m+1}k_0(2^m-1)+2^m>2^m>M.\end{aligned}$$

因此$|Z(P)-Z(P-1)|$ 也是无界的.

因为有无穷多个正整数$m$ 满足$2^m>M$, 因此也有无穷多个正整数$n$满足$|Z(n+1)-Z(n)|$ 和$\dfrac{Z(n+1)}{Z(n)}$ 是无界的. 这就完成了定理的证明.

下面是苟素和李江华对问题2.3.2中的(1)进行的研究:

**定理2.3.2:** 对任意给定的正整数$M$, 存在一个正整数$s$使得

$$|Z(s)-Z(s+1)|>M.$$

**证明:** 对任意的正整数$M$, 我们取定一个正整数$\alpha$使得$s = 2^{\alpha} > M+1$. 此时我们有

$$Z(s) = Z(2^{\alpha}) = 2^{\alpha+1} - 1.$$

因为$s+1$是奇数, 于是有

$$Z(s+1) \leq s = 2^{\alpha}.$$

故

$$|Z(s) - Z(s+1)| \geq (2^{\alpha+1} - 1) - 2^{\alpha} = 2^{\alpha+1} - 1 > M + 1 - 1 = M.$$

综上讨论知存在一个正整数$s$使得$|Z(s) - Z(s+1)| > M$. 即完成了定理的证明.

**问题2.3.3:** *考察下面两组数之间的关系*
(1) $Z(m+n)$与$Z(m)$, $Z(n)$,
(2) $Z(mn)$与$Z(m)$, $Z(n)$.

**问题2.3.4:** *寻求下面方程的所有正整数解*
(1) $Z(n) = Z(n+1)$,
(2) $Z(n)$整除$Z(n+1)$,
(3) $Z(n+1)$整除$Z(n)$.

**注:** 对于$Z(n)$的前50个值, 我们得到满足(2)的有:

$$Z(6)|Z(7),\ Z(22)|Z(23),\ Z(28)|Z(29),\ Z(30)|Z(31),\ Z(46)|Z(47).$$

满足(3)的有:

$$Z(10)|Z(9),\ Z(18)|Z(17),\ Z(26)|Z(25),\ Z(42)|Z(41),\ Z(50)|Z(49).$$

对问题2.3.4中的(1), 苟素和李江华[40]运用初等方法进行了讨论, 具体的说就是下面的:

**定理2.3.3:** *方程$Z(n) = Z(n+1)$无正整数解.*

**证明:** 令$Z(n) = Z(n+1) = m$, 则根据$Z(n)$的定义我们有:

$$n \mid \frac{m(m+1)}{2}, n+1 \mid \frac{m(m+1)}{2}.$$

因$(n, n+1)=1$, 故

$$n(n+1) \mid \frac{m(m+1)}{2} \text{ 及} \frac{n(n+1)}{2} \mid \frac{m(m+1)}{2}.$$

因此

$$n < m. \tag{2-1}$$

另一个方面, 因$n$和$n+1$中有一个是奇数, 故有

(a) 若$n$是奇数, 则$Z(n)=m \leq n-1 < n$.

(b) 若$n+1$是奇数, 则$Z(n+1)=m < n$.

结合(a)和(b)可得

$$m < n. \tag{2-2}$$

根据(2-1)和(2-2), 我们有$n < m < n$, 这是不可能的. 即完成了定理的证明.

**问题2.3.5:** 寻求下面方程的所有正整数解

(1) $Z(n)+Z(n+1)=Z(n+2)$,

(2) $Z(n)=Z(n+1)+Z(n+2)$,

(3) $Z(n)\cdot Z(n+1)=Z(n+2)$,

(4) $Z(n)=Z(n+1)\cdot Z(n+2)$,

(5) $2Z(n+1)=Z(n)+Z(n+2)$,

(6) $Z(n+1)\cdot Z(n+1)=Z(n)\cdot Z(n+2)$,

**问题2.3.6:** 对任意给定的自然数$m$, 存在多少个$n$使得$Z(n)=m$?

**注:** 当$1 \leq m \leq 18$时, 我们有如下表格:

| $m$ | $n$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 10 | 11, 15 |
| 2 | 3 | 11 | 22, 33, 66 |
| 3 | 2, 6 | 12 | 13, 26, 39,78 |
| 4 | 5, 10 | 13 | 91 |
| 5 | 15 | 14 | 35,105 |
| 6 | 7, 21 | 15 | 20, 24, 30, 40, 60, 120 |
| 7 | 4, 14, 28 | 16 | 17, 34, 68, 136 |
| 8 | 9, 12, 18, 36 | 17 | 51, 153 |
| 9 | 45 | 18 | 57, 171 |

表面看来该表格所显示的值没有什么特别. 但是Kenichiro Kashihara发现随着$m$的增大, 方程$Z(n)=m$解的个数不稳定. 因此他又提出了下面几个问题:

(a) 当$m$具有何种条件时, 方程$Z(n)=m$只有唯一一个解.

(b) 因表格中的许多表值(即方程$Z(n)=m$的解$n$)都比$m$大. 但当$m=7$时, $Z(4)=7$. 因此$n=4$是否具有其它的特殊性仍有待大家讨论.

(c) 令$C(m)$是使得$Z(n)=m$的正整数$n$的个数. 计算

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{C(k)}{k}}{m}$$

的值.

**问题2.3.7:** (1) 寻求满足$Z(n)$, $Z(n+1)$, $Z(n+2)$, $Z(n+3)$递增的所有正整数$n$.

(2) 寻求满足$Z(n)$, $Z(n+1)$, $Z(n+2)$, $Z(n+3)$递减的所有正整数$n$.

对于$Z(n)$的前35个值, 我们有递增数列:

$$Z(6)=3<Z(7)=6<Z(8)=15,$$

$$Z(21)=6<Z(22)=11<Z(23)=22,$$

$$Z(30)=15<Z(31)=30<Z(32)=63.$$

有递减数列:

$$Z(8)=15>Z(9)=8>Z(10)=4,$$

$$Z(13)=12>Z(14)=7>Z(15)=5,$$

$$Z(16)=31>Z(17)=16>Z(18)=8.$$

但是Kenichiro Kashihara博士未发现是否存在连续的四项是递增或者递减序列, 因此下面的问题值得大家研究:

**问题2.3.8:** 序列中是否存在无穷多个三个连续递增或者递减的项？

**问题2.3.9:** 证明是否存在四个连续递增或者递减的项？

**问题2.3.10:** 该问题主要是讨论$Z(n)$与Smarandache函数$S(n)$的关系. 即下面的:

$(A)$ 求方程$Z(n) = S(n)$ 的所有正整数解;

$(B)$ 求方程$Z(n) + 1 = S(n)$ 的所有正整数解.

**注:** 张文鹏[41]教授利用初等方法研究方程(A)及(B)的可解性，并获得了这两个方程的所有正整数解，具体地说也就是证明了下面的：

**定理2.3.4:** 对任意正整数$n > 1$, 函数方程

$$Z(n) = S(n)$$

成立当且仅当$n = p \cdot m$, 其中$p$为奇素数，$m$为$\dfrac{p+1}{2}$的任意大于1的因数. 即就是$m \mid \dfrac{p+1}{2}$ 且$m > 1$.

**证明:** 事实上当$n = 1$时, 方程$Z(n) = S(n)$成立. 当$n = 2, 3, 4, 5$时, 显然不满足方程$Z(n) = S(n)$. 于是假定$n \geq 6$且满足方程$Z(n) = S(n)$, 不妨设$Z(n) = S(n) = k$. 由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义可知$k$是最小的正整数使得$n$满足下面的两个整除式:

$$n \mid \frac{k(k+1)}{2}, \quad n \mid k!. \tag{2-3}$$

首先我们证明在(2-3)式中$k+1$不可能为素数. 事实上如果$k+1$为素数, 不妨设$k + 1 = p$, 于是在$n \mid \dfrac{p(p-1)}{2}$中当$(n,\ p) = 1$时, 立刻推出$n \mid \dfrac{p-1}{2}$. 从而$n$整除$\displaystyle\sum_{i=1}^{p-2} i = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. 这与$k = p - 1$为最小的正整数使得$n \mid \dfrac{k(k+1)}{2}$矛盾! 当$(n,\ p) > 1$时, 由于$p$为素数, 所以推出$p \mid n$. 再由于$n \mid k!$我们立刻得到$p|k!$. 这是不可能的, 因为$p = k + 1$, 所以$p$不可能整除$(p-1)!$. 从而证明了在(2-3)式中$k + 1$不可能为素数.

其次我们证明在(2-3)式中当$k$为奇数时$k$一定为素数. 事实上当$k$为奇数时$\dfrac{k+1}{2}$为整数, 若$k$为合数, 则当$k$可以分解成两个不同整数的乘积,

不妨设$k=a\cdot b$，$a>1$, $b>1$且$a\neq b$. 于是注意到$\left(k,\dfrac{k+1}{2}\right)=1$, 不难推出$k=a\cdot b\mid(k-1)!$, $\dfrac{k+1}{2}\mid(k-1)!$及$\dfrac{k(k+1)}{2}\mid(k-1)!$. 再由于$n$整除$\dfrac{k(k+1)}{2}$我们立刻推出$n|(k-1)!$. 这与$k$是最小的正整数使得$n|k!$矛盾. 当$k$为合数且为某一素数的方幂时, 设$k=p^\alpha$且$\alpha\geq 2$. 由于$k$为奇数，所以$p\geq 3$, 从而$p$, $2p$, $\cdots$, $p^{\alpha-1}$均小于$k-1$且每个数都整除$(k-1)!$, 于是由$n$整除$\dfrac{k(k+1)}{2}$仍然可以推出$n|(k-1)!$. 这与$k$的定义矛盾! 所以当$k$为奇数时一定为素数!

结合以上两种情况我们推出当$k$为奇数时有$k=p$, 此时$n$整除$p!$及$n$整除$\dfrac{p(p+1)}{2}$. 但是当$n$整除$\dfrac{p+1}{2}$时, 显然有$S(n)<p$; 当$n=p$时$Z(n)\neq S(n)$. 所以我们可以设$n=p\cdot m$, 其中$m$是$\dfrac{p+1}{2}$的任一大于1的因数.

现在我们证明当$n=p\cdot m$, 其中$m$是$\dfrac{p+1}{2}$的任一大于1的因数时，一定有$Z(n)=S(n)$. 事实上此时显然有$S(pm)=S(p)=p$. 因为$m$不整除$\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1}i=\frac{p(p-1)}{2}$, 否则与$m$整除$\dfrac{p+1}{2}$矛盾! 所以$Z(pm)=p$, 从而$Z(pm)=S(pm)$.

最后, 我们证明不存在偶数$k$使得$Z(n)=S(n)=k$. 我们用反证法来证明这一结论. 假定存在偶数$k=2m$使得$Z(n)=S(n)=k=2m$, 则由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义可知$n$整除$\dfrac{k(k+1)}{2}=m(2m+1)$及$(2m)!$. 由前面的分析可知$2m+1$不可能为素数, 否则当$(n,2m+1)=1$时, $n$整除$\displaystyle\sum_{i=1}^{2m-1}i=m(2m-1)$, 显然这与$2m$是最小的正整数使得$n$整除$m(2m+1)$矛盾! 当$(n,2m+1)>1$时, 由素数的性质立刻推出$p=2m+1\mid n$, 从而再由$n\mid(2m)!$得到$p=2m+1|(2m)!$, 矛盾! 所以$2m+1$不可能为素数，同样可以证明$m$不可能为合数, 否则容易推出$n\mid(2m-1)!$, 与$2m$是最小的正整数使得$n\mid(2m)!$矛盾! 从而$m$为素数$p$，$k=2p$. 于是可得$n\mid p(2p+1)!$及$n|(2p)!$，$S(n)=Z(n)=2p$. 但是当$n$等于$p(2p+1)$的任一因数时都是不可能的! 也就是说对任意$k\mid p(2p+1)$, 不可能有$S(k)=2p$. 于是完成了定理2.3.4的证明.

**定理2.3.5:** 对任意正整数$n$, 函数方程

$$Z(n)+1=S(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中$p$为奇素数，$m$为$\frac{p-1}{2}$的任意因数. 即就是$m\mid\frac{p-1}{2}$.

**证明:** 与定理2.3.4的证明方法相似, 这里只给出大概过程. 假定正整数$n$满足方程$Z(n)+1=S(n)$, 并设$Z(n)+1=S(n)=k$. 于是由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义不难推出$k$是最小的正整数使得

$$n\mid\frac{k(k-1)}{2}\,,\quad n\mid k!. \tag{2-4}$$

显然(2-4)式中当$k$为奇数时一定为素数! 否则可推出$n\mid(k-1)!$, 与$k$是最小的正整数使得$n\mid k!$矛盾. 因此$k=p$为一素数. 再由$n\mid\frac{p(p-1)}{2}$并注意$S\left(\frac{p-1}{2}\right)<p$, 立刻推出$n=p\cdot m$, $m$为$\frac{p-1}{2}$的任一正因数. 容易验证当$n=p\cdot m$, $m$为$\frac{p-1}{2}$的任一正因数时, $n$满足方程$Z(n)+1=S(n)$.

当(2-4)式中$k=2m$为偶数时, $k-1=2m-1$一定为素数, 从而可知不存在这样的正整数$n$使得$Z(n)+1=S(n)=2m$. 所以方程$Z(n)+1=S(n)$成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中$m$为$\frac{p-1}{2}$的任一正因数. 于是完成了定理2.3.5的证明.

显然我们的定理彻底解决了问题(A)及(B). 也就是证明了这两个方程都有无穷多个正整数解，并给出了它们每个解的具体形式！特别在区间[1, 100]中，方程$Z(n)=S(n)$有9个解，它们分别是$n=1$, 6, 14, 15, 22, 28, 33, 66, 91. 对于问题(B), 显然方程$Z(n)+1=S(n)$在区间[1, 50]中有19个解，它们分别是$n=3$, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 26, 29, 31, 34, 37, 39, 41, 43, 47.

**问题2.3.11:** 该问题主要是讨论$Z(n)$与Smarandache函数$U(n)$的关系. 即下面的:

(A) 求方程$Z(n)=U(n)$ 的所有正整数解;

(B) 求方程$Z(n)+1=U(n)$ 的所有正整数解.

**注:** 阎晓霞[42]利用初等方法研究方程$Z(n)=U(n)$及$Z(n)+1=U(n)$的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解, 具体地说也就是证明了下面的:

**定理2.3.6:** 对任意正整数$n>1$，函数方程

$$Z(n)=U(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中$p$为奇素数, $m$为$\frac{p+1}{2}$的任意大于1的因数. 即就是$m\mid\frac{p+1}{2}$且$m>1$.

**证明:** 事实上, 当$n=1$时, 方程$Z(n)=U(n)=1$成立. 当$n=2$, 3, 4, 5时, 显然$n$不满足方程$Z(n)=U(n)$. 于是假定$n\geq 6$且满足方程$Z(n)=U(n)$, 不妨设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$为$n$的标准素因数分解式, 并令$U(n)=U\left(p^{\alpha}\right)=\alpha p$. 于是由函数$Z(n)$及$U(n)$的定义可知$\alpha p$是最小的正整数使得$n$满足下面的整除式:

$$n\mid\frac{\alpha p(\alpha p+1)}{2},\quad p^{\alpha}\mid n. \tag{2-5}$$

现在我们证明在(2-5)式中$\alpha=1$. 事实上如果$\alpha>1$, 则由$p^{\alpha}\mid n$立刻推出

$$p^{\alpha}\mid\frac{\alpha p(\alpha p+1)}{2}. \tag{2-6}$$

由于$(p,\ \alpha p+1)=1$, 所以由上式立刻推出$p^{\alpha-1}\mid\alpha$. 当$p$为奇素数时显然(2-6)式是不可能的, 因为此时$p^{\alpha-1}>\alpha$, 与$p^{\alpha-1}\mid\alpha$矛盾. 当$p=2$时, 推出$\alpha=2$. 这时(2-6)式成为$4\mid\frac{4\times 5}{2}=10$, 矛盾! 所以在(2-5)式中一定有$\alpha=1$且$p$为奇素数. 此时可设$n=p\cdot m$. 则由(2-5)式可推出$p\cdot m\mid\frac{p(p+1)}{2}$, 即就是$m\mid\frac{p+1}{2}$. 显然$m\neq 1$. 否则$n=p$, $Z(p)=p-1$, $U(p)=p$与$Z(n)=U(n)$矛盾! 而当$n=p\cdot m$, $m$为$\frac{p+1}{2}$的任意大于1的因数时, $Z(n)=p$, $U(n)=p$, 所以一定有$Z(n)=U(n)$. 从而推出$n>1$且满足方程$Z(n)=U(n)$当且仅当$n=p\cdot m$, $m$为$\frac{p+1}{2}$的任意大于1的因数. 于是完成了定理2.3.6的证明.

**定理2.3.7:** 对任意正整数$n$，函数方程

$$Z(n)+1=U(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中$p$为奇素数，$m$为$\frac{p-1}{2}$的任意正因数. 即就是$m\mid\frac{p-1}{2}$.

**证明:** 显然$n=1$不满足方程$Z(n)+1=U(n)$. 于是不妨设$n>2$且满足方程$Z(n)+1=U(n)$, 并令$U(n)=U\left(p^{\alpha}\right)=\alpha p$. 于是由$Z(n)+1=U(n)$ 可得$Z(n)=\alpha p-1$. 再由函数$Z(n)$及$U(n)$的定义可推出

$$n \mid \frac{\alpha p(\alpha p-1)}{2}, \quad p^{\alpha} \mid n. \tag{2-7}$$

由于$(p,\ \alpha p-1)=1$, 所以由(2-7)式立刻推出$p^{\alpha-1} \mid \alpha$. 从而利用证明定理2.3.5的分析过程不难推出$\alpha=1$且$p$为奇素数. 所以可设$n=p\cdot m$. 再利用(2-7)式不难推出$m \mid \dfrac{p-1}{2}$. 而当$n=p\cdot m$, $m$为$\dfrac{p-1}{2}$的任意正因数时, 容易验证$n$满足方程$Z(n)+1=U(n)$. 所以方程$Z(n)+1=U(n)$成立当且仅当$n=p\cdot m$, $m$为$\dfrac{p-1}{2}$的任意正因数. 于是完成了定理的证明.

综上所述, 显然我们的定理彻底解决了方程$Z(n)=U(n)$及$Z(n)+1=U(n)$的可解性问题. 也就是证明了这两个方程有无穷多个正整数解，并给出了它们每个解的具体形式! 特别在区间[1, 100]中, 方程$Z(n)=U(n)$有9个解, 它们分别是$n=1,\ 6,\ 14,\ 15,\ 22,\ 28,\ 33,\ 66,\ 91$. 而方程$Z(n)+1=U(n)$在区间[1, 50]中有19个解, 它们分别是$n=3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 21, 23,\ 26, 29, 31,\ 34,\ 37,\ 39,\ 41,\ 43,\ 47$.

**问题2.3.12:** *是否存在有限正整数$n$满足方程*

$$S_c(n)+Z(n)=2n. \tag{2-8}$$

**注:** 我们易知$n=1$满足方程(2-8), $n=3$不满足方程(2-8). 当$p\geq 5$和$p^{\alpha}+2$为奇素数时, $n=p^{\alpha}$满足方程(2-8). 事实上, $Z(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$, $S_c(p^{\alpha})=p^{\alpha}+1$. $S_c(p^{\alpha})+Z(p^{\alpha})=p^{\alpha}+1+p^{\alpha}-1=2$. $n=p^{\alpha}$满足方程(2-8). 例如, $n=1,5,11,17,29,41$是方程(2-8)的六个解. 根据以上分析, 张文鹏教授和李玲[43]猜想方程(2-8)有无穷多个正整数解, 具体的说就是下面的:

**猜想2.3.1:** *对任意的正整数$n$, 上述方程成立当且仅当$n=1$, $3^{\alpha}$和$p^{2\beta+1}$, 其中$\alpha$为使得$3^{\alpha}+2$是素数且大于等于2的整数, $p$为素数且$p\geq 5$, $\beta$为使得$p^{2\beta+1}+2$为素数的任意整数.*

**问题2.3.13:** *求出所有正整数$n$使得伪Smarandache函数$Z(n)$为$n$的原根.*

**注：** 首先我们介绍一下原根的定义及其它的存在性. 设$n > 1$为正整数，$a$为任意整数且$(a,\ n) = 1$. 则由初等数论中著名的Euler定理可知$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$, 其中$\phi(n)$为Euler函数, 即就是$\phi(n)$表示不超过$n$且与$n$互素的正整数的个数. 因此当$(a, n) = 1$时, 至少存在一个正整数$m$使得$a^m \equiv 1 \pmod n$. 设满足同余式$a^m \equiv 1 \pmod n$的最小正整数为$m$. 则当$m = \phi(n)$时, 称$a$为模$n$的原根. 然而，并非所有正整数$n$都有原根. 事实上关于原根的存在性, 只有当$n = 2,\ 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha$, 其中$p$为奇素数, $\alpha$为正整数时, 它才存在原根. 杨明顺[44]利用原根的存在性和$Z(n)$的性质完全解决了问题2.3.13, 即下面的:

**定理2.3.8:** *设$n$是存在原根的任意正整数， 则伪Smarandache函数$Z(n)$为$n$的原根当且仅$n = 2, 3, 4$.*

为了证明定理, 需要下面的引理:

**引理2.3.3:** *设$m > 1$为任意正整数, 则模$m$存在原根当且仅当$m = 2,\ 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha$, 其中$p$为奇素数, $\alpha$为正整数.*

**证明：** 参阅文献[5]或者文献[9]中第 6 章定理4.

**证明：** 运用上述引理我们给出定理的证明.

显然$Z(2) = 3$是2的一个原根；$Z(4) = 7$是4的一个原根. 现在考虑$n = p^\alpha$, 其中$p$为奇素数. 若$Z(n)$是模$n = p^\alpha$的原根，则由$Z(n)$的定义及性质知$Z(n) = p^\alpha - 1$, 所以$p^\alpha - 1$为模$n = p^\alpha$的原根！又由于

$$Z^2(n) = (p^\alpha - 1)^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

且$p^\alpha - 1$为模$n = p^\alpha$的原根，所以$2 = \phi\left(p^\alpha\right) = p^{\alpha-1}(p-1)$. 由此式立刻推出$\alpha = 1$, $p - 1 = 2$. 既就是$n = 2 + 1 = 3$. 因此当$n = p^\alpha$ ($p$为奇素数)时，$Z(n)$为$n$的原根当且仅当$n = p = 3$.

当$n = 2p^\alpha$时，注意到前面列出的$Z(n)$的性质C)我们分两种情况讨论：

(1) 若$p^\alpha \equiv 3 \pmod 4$, 则由$Z(n)$的定义及性质可得$Z(n) = p^\alpha$. 因为$(p^\alpha,\ 2p^\alpha) = p^\alpha > 1$, 所以$Z(n) = p^\alpha$不可能为$n = 2p^\alpha$的原根.

(2) 若$p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$, 则由$Z(n)$的定义及性质可得$Z(n) = p^\alpha - 1$. 因为$(p^\alpha - 1,\ 2p^\alpha) = 2 > 1$, 所以$Z(n) = p^\alpha - 1$也不可能为$n = 2p^\alpha$的原根.

综合以上结果以及$n$的原根存在定理我们立刻推出$Z(n)$为$n$的原根当且仅当$n = 2, 3, 4$. 于是完成了定理的证明.

**问题2.3.14:** 函数$Z(n)$的值分布很不规则, 对有些$n$, 例如$n = \frac{m(m+1)}{2}$, 有$Z(n) = m < \sqrt{2n}$. 而对于另一些$n$, 如$n = 2^{\alpha}$, 有$Z(n) = 2^{\alpha+1} - 1 = 2n - 1$. 因此有必要研究$Z(n)$的均值性质, 给出均值

$$\sum_{n\le x} Z(n), \quad \sum_{n\le x} \ln(Z(n)), \quad \sum_{n\le x} \frac{1}{Z(n)}$$

的一个渐近公式.

**注:** 娄源冰[45]运用初等和解析方法研究了$\ln Z(n)$的均值, 给出了下面的渐近公式:

**定理2.3.9:** 对任意的实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} \ln Z(n) = x \ln x + O(x).$$

首先他给出一个简单的引理:

**引理2.3.4:** 对任意的实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{p\le x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1),$$

其中$\sum\limits_{p\le x}$是所有$2 \le p \le x$的素数和.

**证明:** 参见文献[3]中定理4.10.

**证明:** 运用上面的引理我们很容易证明定理2.3.9. 事实上, 对任意的正整数$n > 1$, 注意到$n \mid \frac{2n(2n-1)}{2}$, 根据$Z(n)$的定义我们有$Z(n) \le 2n - 1$. 因此根据欧拉求和公式可得

$$\sum_{n\le x} \ln Z(n) \le \sum_{n\le x} \ln(2n-1) \le x \ln x + O(x). \tag{2-9}$$

现在我们令集合$A$表示区间$[1,\ x]$的所有square-full数$n$(即就是若$p \mid n$, 则$p^2 \mid n$). 于是我们有

$$\sum_{n\le x}\ln Z(n)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln Z(n)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\notin A}}\ln Z(n). \tag{2-10}$$

根据文献[46]有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}1=\frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}x^{\frac{1}{2}}+\frac{\zeta(\frac{2}{3})}{\zeta(2)}x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{6}}\exp\left(-C\log^{\frac{3}{5}}x(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right)\right),$$

其中$C>0$ 为常数. 由上面的估计式和$\ln Z(n)\le\ln(2n)$, 我们可以得到

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln Z(n)\ll\sqrt{x}\cdot\ln x. \tag{2-11}$$

若$n\notin A$, 则$n=1$或者至少存在一个素数$p$ 使得$p\mid n$且$p^2\dagger n$. 因此根据引理2.3.4, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\notin A}}\ln Z(n) &= \sum_{\substack{np\le x\\ (n,\ p)=1}}\ln Z(np)\ge\sum_{p\le x}\sum_{\substack{n\le \frac{x}{p}\\ (n,\ p)=1}}\ln(p-1)\\ &= \sum_{p\le x}\left[\frac{x}{p}-\frac{x}{p^2}+O(1)\right]\cdot\ln(p-1)\\ &= x\cdot\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}-x\cdot\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p^2}+O(x)\\ &= x\cdot\ln x+O(x).\end{aligned} \tag{2-12}$$

结合(2-9), (2-10), (2-11)和(2-12)我们可以得到以下渐近公式

$$\sum_{n\le x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x).$$

于是完成了定理的证明.

以下是关于伪Smarandache函数$Z(n)$和$Zw(n)$的三个方程问题:

**问题2.3.15:** *研究方程*

$$Zw(Z(n))-Z(Zw(n))=0 \tag{2-13}$$

的解, 其中$Z(n)$是伪Smarandache函数.

**问题2.3.16:** 研究不等式$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0$的解.

**问题2.3.17:** 研究不等式$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0$的解.

**注:** 关文吉和郑亚妮[47]运用初等方法研究了以上三个问题, 即下面的:

**定理2.3.10:** 方程$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) = 0$有无穷多个正整数解.

**推论2.3.1:** 不等式$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0$有无穷多个正整数解.

**推论2.3.2:** 不等式$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0$有无穷多个正整数解.

为了证明定理, 必须用到文献[48]中有关伪Smarandache函数$Z(n)$的下列性质:

**引理2.3.5:** 对于任意的素数$p > 2$, $Z(p) = p - 1$.

**引理2.3.6:** 若$n = p^m$, 其中$p$为大于2的素数, $m$为任意自然数, 则$Z(n) = n - 1$.

**引理2.3.7:** 若$n = 2^m$, 其中$m$为任意自然数, 则$Z(n) = 2n - 1$.

**引理2.3.8:** 若$n$为任意自然数, 且$\dfrac{n}{2}$为比2大的奇数, 则

$$Z(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{若} 4 \mid (\frac{n}{2} - 1); \\ \frac{n}{2}, & \text{若} 4 \mid (\frac{n}{2} + 1). \end{cases}$$

**引理2.3.9:** 若$n$为任意自然数, 且$\dfrac{n}{3}$为比3大的素数, 则

$$Z(n) = \begin{cases} \frac{n}{3} - 1, & \text{若} 3 \mid (\frac{n}{3} - 1); \\ \frac{n}{3}, & \text{若} 3 \mid (\frac{n}{3} + 1). \end{cases}$$

**证明:** 下面, 我们将根据以上引理中提到的$n$的形式完成定理的证明(以下提到的$p$均为素数). 显然当$n=1$时, $Zw(Z(1))-Z(Zw(1))=0$, 以下来讨论$n>1$时的情形:

(1) 当$n=p>2$时. 由引理2.3.5知,

$$Zw(Z(n))=Zw(Z(p))=Zw(p-1),$$

$$Z(Zw(n))=Z(Zw(p))=Z(p)=p-1.$$

若方程成立, 则$Zw(p-1)=p-1$.

显然当$p-1$为无平方因子数时, 上式成立.

(2) 当$n=p^m$, $p>2$, $m\in N$且$m>1$时. 由引理2.3.6知

$$Zw(Z(n))=Zw(Z(p^m))=Zw(p^m-1),$$

$$Z(Zw(n))=Z(Zw(p^m))=Z(p)=p-1.$$

若方程(2-13)成立,则$Zw(p^m-1)=p-1$. 解得$p=3$, $m=2$, 即$n=9$为方程的解.

(3) 当$n=2^m$, $m\in N$.

由引理2.3.7知

$$Zw(Z(n))=Zw(Z(2^m))=Zw(2^{m+1}-1),$$

$$Z(Zw(n))=Z(Zw(2^m))=Z(2)=3.$$

若方程(2-13)成立,则$Zw(2^{m+1}-1)=3$. 解得$m=1$, $n=2$为方程的解.

(4) 当$n=2p_1p_2\cdots p_k$, $p_i>2(i=1,2,\cdots k)$为不同的素数时. 由引理2.3.8知

$$Z(n)=\begin{cases} p_1p_2\cdots p_k-1, & 若4\mid p_1p_2\cdots p_k-1;\\ p_1p_2\cdots p_k, & 若4\mid p_1p_2\cdots p_k+1.\end{cases}$$

故

$$Zw(Z(n))=\begin{cases} Zw(p_1p_2\cdots p_k-1), & 若4\mid p_1p_2\cdots p_k-1;\\ p_1p_2\cdots p_k, & 若4\mid p_1p_2\cdots p_k+1.\end{cases}$$

$$Z(Zw(n))=Z(2p_1p_2\cdots p_k)\begin{cases} p_1p_2\cdots p_k-1, & 若4\mid p_1p_2\cdots p_k-1;\\ p_1p_2\cdots p_k, & 若4\mid p_1p_2\cdots p_k+1.\end{cases}$$

所以当$n=2p_1p_2\cdots p_k$且$4\mid p_1p_2\cdots p_k+1$时, 方程(2-15)成立.

(5) 当$n=3p$, $p\geq 5$时.

由引理2.3.9知

$$Z(n)=Z(3p)\begin{cases} p-1, & 若3\mid p-1;\\ p, & 若3\mid p+1.\end{cases}$$

$$Zw(n)=Zw(3p)=3p.$$

故

$$Zw(Z(n))=\begin{cases} Zw(p-1), & 若3\mid p-1;\\ Zw(p)=p, & 若3\mid p+1.\end{cases}$$

$$Z(Zw(n))=Z(3p)\begin{cases} p-1, & 若3\mid p-1;\\ p, & 若3\mid p+1.\end{cases}$$

所以当$n=3p$且$p\geq 5$时, 方程(2-13)成立. 显然存在无穷多个素数$p$使得$3\mid p+1$，因而方程(2-13)有无穷多个正整数解. 综合以上1-5, 得到方程(2-13)有无穷多个正整数解. 这就完成了定理的证明.

下面来证明推论2.3.1和推论2.3.2:

(a) 由定理证明中的第1种情况知:

当$n=p>2$且$p-1$含平方因子数时, $Zw(Z(n))=Zw(p-1)<p-1=Z(Zw(n))$, 所以$Zw(Z(n))-Z(Zw(n))<0$.

由定理证明中的第4种情况知:

当$n=2p_1p_2\cdots p_k$且$4\mid p_1p_2\cdots p_k-1$时, 即$p_1p_2\cdots p_k-1=2^2t$, $t\in N$.

$$Zw(Z(n))=Zw(p_1p_2\cdots p_k-1)=Zw(2^2t)<2^2t.$$

而此时

$$Z(Zw(n))=Z(Zw(2p_1p_2\cdots p_k))=2^2t.$$

所以$Zw(Z(n))-Z(Zw(n))<0$. 这就证明了推论2.3.1.

(b) 由定理证明中的第3种情况知: 当$n=2^m$且$m>1$时, $Zw(Z(n))=Zw(Z(2^m))=Zw(2^{m+1}-1)>3$,

而此时

$$Z(Zw(n))=Z(Zw(2^m))=Z(2)=3.$$

所以$Zw(Z(n))-Z(Zw(n))>0$. 这就证明了推论2.3.2.

**问题2.3.18:** 求方程

$$\sum_{k=1}^{n} Z(k)=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2-14}$$

的所有正整数解.

**注:** 张爱玲[49]完全解决了该问题, 即下面的:

**定理2.3.11:** 对任意正整数$n$, 上述方程成立当且仅当$n=1$, 3.

**引理2.3.10:** 对于任意正整数$n$, 有估计式

$$\sum_{k\le n} Z(2k)\le \frac{15}{16}n^2+\frac{9n}{2}+\frac{45}{4}.$$

**证明:** 我们分两种情况讨论: 当$n=2m$为偶数时, 有

$$\sum_{k\le n} Z(2k)=\sum_{k\le m} Z\left(2(2k-1)\right)+\sum_{k\le m} Z\left(4k\right) \tag{2-15}$$

注意到$Z\left(2(2k-1)\right)\le 2k-1$, 如果$2\mid k$, $Z\left(2(2k-1)\right)\le 2k-2$; 如果$2\dagger k$, 于是我们有

$$\sum_{k\le m} Z\left(2(2k-1)\right)\le Z(2)+\sum_{1<k\le m}(2k-1)=\frac{n^2}{4}+2. \tag{2-16}$$

设$u=\left[\dfrac{m+1}{2}\right]$表示不超过$\dfrac{m+1}{2}$的最大整数. 则我们有

$$\sum_{k\le m} Z\left(4k\right)\le \sum_{k\le u} Z\left(4(2k-1)\right)+\sum_{k\le u} Z\left(8k\right). \tag{2-17}$$

当$2k-1>4$时, 注意到: 如果$k\equiv 1(\bmod 4)$, 则$Z\left(4(2k-1)\right)\le 2k-2$; 如果$k\equiv 0(\bmod 4)$, 则$Z\left(4(2k-1)\right)\le 2k-1$; 如果$k\equiv 2(\bmod 4)$, 则$Z\left(4(2k-1)\right)\le 3(2k-1)$; 如果$k\equiv 3(\bmod 4)$, 则$Z\left(4(2k-1)\right)\le 3(2k-1)-1$. 所以我们有

$$\sum_{k\le u} Z\left(4(2k-1)\right)\ \le\ Z(4)+Z(12)+\sum_{3\le k\le u} 3(2k-1)$$

$$\begin{aligned} &= 4-1+\sum_{k\le u}3(2k-1) \\ &= 3(u^2+1)\le 3+\frac{3(m+1)^2}{4}. \qquad (2\text{-}18)\end{aligned}$$

注意到$Z(2n)\le 4n-1$ 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k\le u}Z\left(8k\right) &\le \sum_{k\le u}(16k-1)\le 8u(u+1)-u \\ &\le 2(m+1)^2+\frac{7(m+1)}{2}. \qquad (2\text{-}19)\end{aligned}$$

结合(2-17), (2-18)及(2-19)可得

$$\begin{aligned}\sum_{k\le m}Z\left(4k\right) &\le \sum_{k\le u}Z\left(4(2k-1)\right)+\sum_{k\le u}Z\left(8k\right) \\ &\le \frac{11}{4}(m+1)^2+\frac{7m+13}{2}=\frac{11}{16}n^2+\frac{9n}{2}+\frac{37}{4}. \qquad (2\text{-}20)\end{aligned}$$

由(2-15), (2-16)及(2-20)式立刻得到

$$\sum_{k\le n}Z(2k)=\sum_{k\le m}Z\left(2(2k-1)\right)+\sum_{k\le m}Z\left(4k\right)\le\frac{15}{16}n^2+\frac{9n}{2}+\frac{45}{4}.$$

于是证明了当$n$为偶数时引理成立.

当$n$为奇数时, 设$n=2m+1$, 于是注意到估计式$Z(2(2m+1))\le 2m+1$, 应用$n$为偶数的结果, 仍然有不等式

$$\begin{aligned}\sum_{k\le n}Z(2k)=\sum_{k\le 2m+1}Z\left(2k\right) &= Z(2(2m+1))+\sum_{k\le 2m}Z\left(2k\right) \\ &< \frac{15}{16}n^2+\frac{9n}{2}+\frac{45}{4}.\end{aligned}$$

于是完成了引理的证明.

**证明:** 现在我们应用引理2.3.10来完成定理的证明. 首先证明当$n\ge 64$时有

$$\sum_{k=1}^{n}Z(k)<\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (2\text{-}21)$$

事实上当$n\geq 64$时, 设$u=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, 注意到$Z(2k+1)\leq 2k$, 由引理有

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq n} Z(k) &= \sum_{k\leq u} Z\left(2k-1\right)+\sum_{k\leq \frac{n}{2}} Z\left(2k\right)\\ &\leq 1+\sum_{2\leq k\leq u}(2k-2)+\frac{15}{64}n^2+\frac{9n}{4}+\frac{45}{4}\\ &\leq \frac{31}{64}n^2+\frac{5n}{4}+\frac{49}{4}<\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

所以当$n\geq 64$时有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} Z(k)<\frac{n(n+1)}{2}.$$

即就是(2-21)式成立. 因此当$n\geq 64$时方程(2-14)没有正整数解. 当$n<64$时, 通过直接检验和编程序验证可得$n=1$及$n=3$是方程(2-14)的解. 于是完成了定理的证明.

**问题2.3.19:** 求方程

$$Z(n)=\phi(n), \tag{2-22}$$

和方程

$$Z(n)+\phi(n)=n \tag{2-23}$$

的所有正整数解, 其中$\phi(n)$为Euler函数. 这一方程有无限多个正整数解, 例如当$n$为素数$p$时均满足第一个方程. 当$n=2p$且$p\equiv 1(\text{mod }4)$时, $n$也满足第一个方程. 除了这些平凡解外, 是否还有其它正整数解是一个公开的问题. 猜测该方程只有$n=1$以及上述两种解.

**注:** 田呈亮根据$Z(n)$和$\phi(n)$的性质给出如下结论供大家参考(该结论将发表于《南京大学学报》):

(a) 对任意整数$n>1$, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, $p_1<p_2<\cdots<p_r$, $\alpha_i\geq 1$, $i=1, 2, \cdots, r$为$n$的标准分解式, 若$n$适合方程(2-22), 则$\alpha_r=1$, 且有

(i) 若$n=2^{\alpha}p$, 则$n$为方程(2-22)的正偶数解的充要条件为$p\equiv 1(\text{mod }4)$, $2^{\alpha-1}\equiv 1(\text{mod }p)$;

(ii) 方程(2-22)不存在形如$p_1^{\alpha_1}p_2(p_1, p_2$为奇素数)的正奇数解.

(b) (i) $n$为偶数时, 方程(2-23)成立当且仅当$n = 2^\alpha p$, 其中$p \equiv 3(\bmod 4)$, $2^{\alpha-1} \equiv -1(\bmod p)$.

(ii) $n$为奇数时, 设$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots, r$为$n$的标准分解式, 若$n$适合方程(2-23), 则$\alpha_r = 1$, 且方程(2-23)存在无限多个正奇数解.

**问题2.3.20:** 求方程$S(Z(n)) = Z(S(n))$的所有正整数解. 猜测该方程最多有有限个正整数解.

以上我们列出了伪Smarandache函数的相关定理和问题, 我们可以看出伪Smarandache函数的定理及其所产生的问题类似于Smarandache函数. 但是还有以下一些问题值得大家研究, 即:

**问题2.3.21:** 讨论$Z(n)$与古典数论函数的关系.

**问题2.3.22:** 讨论$Z(n)$与其它类型Smarandache函数的关系.

**问题2.3.23:** 计算$Z(n)$的值.

当然, 可能还存在其它的伪Smarandache函数, 有兴趣的读者可定义新的函数并研究它们的性质.

# 第三章　Kenichiro Kashihara博士的研究工作

Kenichiro Kashihara博士主要解决了关于Smarandache的公开问题. 这一章中, 我们主要了解Kenichiro Kashihara博士的研究工作. 具体的说就是下面的这些问题:

## 3.1　欧拉常数

**定义3.1:** 定义欧拉常数$C$为

$$C = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n).$$

**问题3.1:** 是否能用任何一个Smarandache定义的数$s_n$定义另一个常数(其类似于欧拉常数)

$$C_s = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k} - \ln s_n).$$

**问题3.2:** 讨论

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k} - \ln p_n)$$

是否收敛, 其中$p_n$是第$n$个素数.

## 3.2　Smarandache群

**问题3.3:** 是否任何一个Smarandache定义的数构成的集合可以构成一个群? 若是这样, 哪个集合构成一个群且该群的运算是什么?

**注:** Kenichiro Kashihara博士未找到这样的例子. 然而现代代数中群是理论基础. 若一个集合是一个群, 则它在数论中是非常有研究意义的, 或许从中我们可以得到很重要的结论.

## 3.3 连分数

我们很容易构造一个由连分数构成的数, 但很难确定该数是有理数还是无理数.

**问题3.4:** Smarandache定义的数$s_n$中, 哪种类型使得连分数

$$[s_1, s_2, s_3, \cdots] = s_1 + \frac{1}{s_2 + \frac{1}{(s_3 + \cdots)}}$$

是一个代数无理数.

**注:** 若我们选择任意一个Smarandache定义的数, 则很可能连分数为超越数. 因此这些数的绝大部分都是超越数, 故找到一个代数连分数是非常有价值的.

## 3.4 伪Dirichlet素数分布

Dirichlet证明了如下定理:

**定理3.1:** 设$\{a_n\}$是一个算术级数, $a_n = np + q$, 其中$p$和$q$互素. 则序列$\{a_n\}$含有无穷多个素数.

类比定理3.1, Kenichiro Kashihara博士提出了以下猜想:

**猜想3.1:** 设序列$\{b_n\}$为$b_n = p^n + q$, 其中$2 \mid (p+q+1)$. 则序列$\{b_n\}$含有无穷多个素数.

**注:** 当然, 这个猜想是否正确还有待大家进一步研究. 另外, 条件$2 \mid (p+q+1)$是否合适也仍需讨论.

Kenichiro Kashihara博士认为: $\{b_n\}$中至少有一个素数对解决猜想3.1是至关重要的.

## 3.5 具有Smarandache系数的Dirichlet级数

**定义3.2:** 给定一个整数序列$\{a_n\}$, Dirichlet级数具有如下形式:

$$\sum_{n\in N}\frac{a_n}{n^s},$$

其中$s\in C$.

**定义3.3:** 具有Smarandache系数的Dirichlet级数仍为Dirichlet级数, 其中$\{a_n\}$是Smarandache序列中的某种类型.

**问题3.5:** 研究具有Smarandache系数的Dirichlet级数的敛散性.

## 3.6 有序序列

Kenichiro Kashihara博士给出了三种类型的有序序列, 即下面的:

1)素数有序序列

**定义3.4:** 令$\{p_n\}$表示素数序列, 素数有序序列$\{x_n\}$定义为满足$p_n^{x_n}-1\equiv 0(\bmod\ p_{n+1})$的最小正整数$x_n$. 该序列的前几项的值为:

$$2,4,6,10,12,4,9,22,7,10,4,10,7,46,13,29,60,66,70,\cdots.$$

**猜想3.2:** 在素数有序序列$\{x_n\}$中, 有许多项都是偶数.

**猜想3.3:** 在素数有序序列$\{x_n\}$中, 有无穷多个素数.

**猜想3.4:** 8是序列$\{x_n\}$中不存在的最小偶数.

2)平方有序序列

**定义3.5:** 设$\{s_n\}$是平方序列, 即$s_n=n^2$. 平方有序序列$\{y_n\}$为使得$s_n^{y_n}-1\equiv 0(\bmod\ s_{n+1})$的最小正整数. 该序列的前几个元素为:

$$1,3,2,5,3,7,4,9,5,11,6,13,7,15,\cdots.$$

对于平方有序序列, Kenichiro Kashihara博士给出了$\{y_n\}$的表达式, 即下面的:

**定理3.2:** 对于平方阶序列, 我们有

$$y_n = \begin{cases} k, & n = 2k-1, \\ 2k+1, & n = 2k \end{cases}$$

**证明:** 根据平方阶序列的定义, 我们有

$$n^{2y} - 1 = (n^2-1)(n^{2y-2} + n^{2y-4} + \cdots + n^2 + 1) \equiv 0(\bmod\ (n+1)^2).$$

若$(n-1,\ n+1) = 1$, 则有

$$(n^{2y-2} + n^{2y-4} + \cdots + n^2 + 1) \equiv 0(\bmod\ (n+1)),$$

因此可得$y = n+1$.

若$(n-1,\ n+1) = 2$, 则有

$$(n^{2y-2} + n^{2y-4} + \cdots + n^2 + 1) \equiv 0 \left(\bmod\ \frac{n+1}{2}\right),$$

因此可得$y = \dfrac{n+1}{2}$.

这就完成了定理的证明.

3)立方有序序列

**定义3.6:** 设$\{c_n\}$是立方数序列, 即$c_n = n^3$. 立方有序数列$\{z_n\}$为使得$c_n^{z_n} - 1 \equiv 0(\bmod\ z_{n+1})$的最小正整数$z_n$. 该序列的前几项的值为:

$$1, 6, 16, 50, 6, 98, 64, 54, 50, 242, 12, \cdots.$$

关于这个序列, Kenichiro Kashihara博士提出了两个猜想:

**猜想3.5:** 数列$\{z_n\}$中除第一项外, 其余各项都是偶数.

**猜想3.6:** 在数列$\{z_n\}$中存在无限多个平方数.

**注:** 丁峥尚[51]利用初等方法研究数列$\{z_n\}$的计算问题, 并给出了$z_n$的具体表示形式. 即就是证明了猜想(3.5)及猜想(3.6)是正确的,具体地说也就是证明了下面的:

**定理3.3:** 对任意正整数$n$, $\{z_n\}$定义如上, 则我们有表示式:
$(a)$. $x_n = (n+1)^2$, 如果$n \equiv 1 \pmod 6$ 或者$n \equiv 3 \pmod 6$,
$(b)$. $x_n = 2(n+1)^2$, 如果$n \equiv 0 \pmod 6$ 或者$n \equiv 4 \pmod 6$,
$(c)$. $x_n = \frac{1}{3}\cdot(n+1)^2$, 如果$n \equiv 5 \pmod 6$,
$(d)$. $x_n = \frac{2}{3}\cdot(n+1)^2$, 如果$n \equiv 2 \pmod 6$.

显然由此定理立刻推出除了$x_1$外, 其它所有$x_n$ $(n > 1)$均为偶数. 同时由定理的(a)知数列$\{x_n\}$包含无穷多个完全平方数. 从而完全解决了Kenichiro Kashihara提出的两个猜想!

**证明:** 首先给出猜想3.5的简单证明. 事实上对任意正整数$n > 1$, 设$y$是最小的正整数使得

$$n^{3y} \equiv 1(\bmod\ (n+1)^3). \tag{3-1}$$

则由(3-1)式及二项式定理可得

$$n^{3y} - 1 = (n+1-1)^{3y} \equiv (-1)^{3y} - 1 \equiv (-1)^y - 1 \equiv 0 \ (\bmod\ (n+1)).$$

由上式立刻推出$y$一定为偶数! 所以当$n > 1$时, $x_n$一定为偶数. 于是证明了猜想3.5.

为计算$x_n$的具体值, 我们继续应用同余式(3-1)及二项式定理并注意$y$为偶数可得:

$$\begin{aligned} n^{3y} - 1 &= (n+1-1)^{3y} - 1 \\ &\equiv \frac{3y(3y-1)}{2}\cdot(n+1)^2 - 3y(n+1) \\ &\equiv 0 \ (\bmod\ (n+1)^3). \end{aligned} \tag{3-2}$$

由上式也可以推出同余式

$$-3y(n+1) \equiv 0 \ (\bmod\ (n+1)^2). \tag{3-3}$$

我们分几种情况讨论: 当$(3,\ n+1) = 1$时, 由(3-3)式立刻推出$y = k(n+1)$, 其中$k$为任意正整数. 将$y = k(n+1)$代入(3-2)式可得

$$\frac{3k(3k(n+1)-1)}{2}\cdot(n+1)^3 - 3k(n+1)^2 \equiv 0 \ (\bmod\ (n+1)^3). \tag{3-4}$$

由于$y$为偶数, 所以当$n+1$为偶数时, (3-4)式的最小正整数解为$k = n+1$. 此时注意到$2|n+1$, $(3,\ n+1) = 1$, 从而$n = 6t+1$或者$n = 6t+3$, 其中$t$为

任意非负整数. 所以当$n$为形如$6t+1$或者$6t+3$的正整数(其中$t$为任意正整数)时, 满足$n^{3x_n} \equiv 1 \pmod{(n+1)^3}$的最小正整数$x_n$为$x_n=(n+1)^2$.

同样当$n+1$为奇数时, 注意到$y$为偶数，所以(3-4)式的最小正整数解仍为$k = 2(n+1)$. 此时注意到$(6,\ n+1) = 1$, 从而$n = 6t$或者$n=6t+4$, 其中$t$为任意非负整数. 所以当$n$为形如$6t$或者$6t+4$的正整数(其中$t$为任意正整数)时, 满足$n^{3x_n} \equiv 1 \pmod{(n+1)^3}$ 的最小正整数$x_n$为$x_n=2(n+1)^2$.

当$(3,\ n+1)>1$, 即就是$3 \mid n+1$时, 由(3-3)式立刻推出$y=\dfrac{1}{3}k(n+1)$, 其中$k$为任意正整数. 将$y=\dfrac{1}{3}k(n+1)$代入(3-2)式可得

$$\frac{k(k(n+1)-1)}{2}\cdot(n+1)^3-k(n+1)^2 \equiv 0 \pmod{(n+1)^3}. \tag{3-5}$$

显然当$2|n+1$时, 满足(3-5)式的最小正整数$k = n+1$. 此时注意到$6|n+1$, 即就是$n = 6t+5$, 所以当$n$为形如$6t+5$的正整数(其中$t$为任意正整数)时, 满足同余方程 $n^{3x_n} \equiv 1 \pmod{(n+1)^3}$ 的最小正整数$x_n$为$x_n=\frac{1}{3}\cdot(n+1)^2$.

而当$(2,\ n+1)=1$时, 注意到$y$为偶数, 所以满足(3-5)式的最小正整数$k=2(n+1)$. 此时注意到$3|n+1$, $(2,\ n+1)=1$, 即就是$n=6t+2$, 所以当$n$为形如$6t+2$ 的正整数(其中$t$为任意正整数)时, 满足同余方程 $n^{3x_n} \equiv 1 \pmod{(n+1)^3}$ 的最小正整数$x_n$为$x_n = \dfrac{2}{3}\cdot(n+1)^2$. 由于$n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \pmod 6$覆盖了所有自然数, 从而完成了定理的证明!

## 3.7 关于由Smarandache定义的序列的不等式

**问题3.6:** *在Smarandache定义的序列数中, 能否找到满足如下不等式的序列数:*

$$s_{n+1}-s_n < \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{s_i}}. \tag{3-6}$$

**注** 若用$\{p_n\}$代替$\{s_n\}$, Kenichiro Kashihara博士猜想不等式(3-6)成立. 因为

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{p_i})$$

不是$p_i$的倍数, 所以

$$p_{n+1}-p_n<\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.$$

这表明素数序列$\{p_n\}$是稳定分布的. Kenichiro Kashihara博士还未对此猜想进行证明, 这有待大家进一步讨论.

## 3.8 关于由Smarandache定义的序列的极限

**问题3.7:** 在Smarandache定义的序列$\{s_n\}$中, 能否找到这样的序列满足如下关系:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}s_i^2}{(\sum\limits_{i=1}^{n}s_i)^2}=\rho,$$

其中$\rho\in R$.

**注** 以Kenichiro Kashihara博士对数字的研究经验, 他认为若用素数序列$\{p_n\}$代替$\{s_n\}$, 则$\rho$可能收敛于1.4和1.5之间的某个数. 至于$\rho$的真实值是多少仍是一个未解决的问题.

## 3.9 伪有序序列

**定义3.7:** 给定任意的序列$\{a_n\}$, $\{a_n\}$的伪有序序列$\{b_n\}$定义如下: $\{b_n\}$为满足方程

$$a_{n+1}^b\equiv a_{n+2}(\text{mod } a_n)$$

的最小正整数解$b$.

**问题3.8:** 对$\{a_n - s_n\}$这个簇, 寻求$\{b_n\}$. 且考虑$\{a_n\}$是素数序列时的情况.

**注:** 下面形如$x_n = (p_n, p_{n+1}, p_{n+2})$的数的集合都是方程

$$p_{n+1}^x \equiv p_{n+2} (\mathrm{mod}\ p_n)$$

的解, 即:

$$(2,3,5)=1,\ (3,5,7)=2,\ (5,7,11)=4,\ (11,13,17)=9,$$

$$(13,17,19)=9,\ (19,23,29)=16,\ (23,29,31)=4,\ (29,31,37)=3,$$

$$(59,61,67)=3,\ (71,73,79)=3,\ (71,73,79)=3,\ (79,83,89)=18,\cdots.$$

利用原根的表达式, 我们可知$\{x_n\}$中某些项是没有定义的. 例如,

$$11^x \equiv 13 (\mathrm{mod}\ 7) \rightarrow 4^x \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 7) \rightarrow$$

$$3^{4x} \equiv 3^3 (\mathrm{mod}\ 7) \rightarrow 4x \equiv 3 (\mathrm{mod})$$

没有整数解.

因此, 序列$\{x_n\}$为:

$$1,2,4,-,16,4,3,-,-,-,-,-,-,3,-,-,3,-,18,81,-,-,70,\cdots,$$

其中“$-$”表示没有定义的项.

## 3.10 关于素数平方分解为平方和问题

**猜想3.7:** 给定任意的$n \in N$, 我们可以找到一个素数$p$使得$p^2$为$n$个数之和, 且这$n$个数是可以是相同的平方数.

例如, 若$n = 4, p = 5$, 则有

$$5^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2;$$

且当$n = 6, p = 11$时, 我们有

$$11^2 = 8^2 + 6^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2.$$

**注:** 若利用古典Lagrange定理:

每个数$n$都可以表示为至多四个平方数之和,

则该猜想是很难证明的. 因为

$$\left(p^2 - \sum(n-4)\right)^2$$

不能总表示为四个平方数之和.

这个猜想与Smarandache平方基问题相关. Kenichiro Kashihara博士指出, 当他三年前提出该猜想时就没有解决它, 因此有兴趣的读者可以对其进行探讨.

**问题3.9:** 找出所有的数对$(n,p)$使得

$$p^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

其中$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $n \in N$, $p$为素数.

这个问题可能较难解决, 有待大家进一步研究.

## 3.11 素数组合

**问题3.10:** 设$U = \{1\} \cup \{所有素数\}$, 是否每一个自然数$m$都可以表示成如下素数组合的形式:

$$m = \sum_{i \in N} a_i^{b_j},$$

其中$a_i, b_j \in U$且$a_i$互不相等.

注意, 组合式中的指数$b_j$可以相等, 例如:

$$10 = 1^2 + 3^2,\ 31 = 2^2 + 3^3,\ 59 = 2^5 + 3^3 = 1 + 3^2 + 7^2.$$

从上面最后一个等式我们可以看出, 一个数可以有不止一种素数组合形式.

**问题3.11:** *若问题3.10中加上条件: 指数$b_j$互不相同, 则问题3.10中所有自然数的素数组合形式是否依然成立.*

Kenichiro Kashihara博士认为, 条件改变后并不影响所有自然数的素数组合形式.

**问题3.12:** *每一个数有多少种素数组合形式.*

## 3.12 $p$-进无理数

我们现在在$p$-进体系中考虑实数.

**问题3.13:** *对任意的自然数$q$, 设$N(q)$是关于$N$小数位$q$的舍位, 判断下面的等式是否成立:*

*对每个$q \in N$, 存在某个实数$r, 0 < r < 1$, 使得*

$$r = \lim_{N\to\infty} \frac{N(q)}{N}.$$

Kenichiro Kashihara博士指出, 对解决这个问题他还没有思路. 该问题可供有兴趣的读者思考.

## 3.13 Diophantine方程

下面给出一些Diophantine方程, 其中所有的变量是整数.

**问题3.14:** *寻求方程*

$$x^y + y^z + z^x = 0 \tag{3-7}$$

*的所有整数解.*

**注:** 刘燕妮对方程(3-7)进行了研究, 得出以下结论:

方程(3-7)有且仅有三组整数解, 它们分别是

$$(x,\ y,\ z) = (-2,\ 1,\ 1),\ (1,\ -2,\ 1),\ (1,\ 1,\ -2).$$

张文鹏教授提出了研究方程(3-7)的一般形式, 也就是研究$n$个变量的方程

$$x_1^{x_2} + x_2^{x_3} + \cdots + x_{n-1}^{x_n} + x_n^{x_1} = 0$$

的可解性以及它的一般整数解, 该问题值得大家进一步探讨!

**问题3.15:** 寻求方程

$$(a^b b^a)^{\frac{2}{a+b}} = c$$

或

$$(a^b b^c c^a)^{\frac{3}{a+b+c}} = d$$

的所有正整数解.

**注:** 丁峥尚[52]用初等方法解决了这个问题, 即下面的:

**定理3.4:** 正整数$a$, $b$和$c$满足方程

$$(a^b b^a)^{\frac{2}{a+b}} = c \tag{3-8}$$

当且仅当$a = b = s,\ c = s^2$, 其中$s$是任意的正整数.

**证明:** 对任意的正整数$a$, $b$和$c$, 若它们满足Diophantine方程, 则有

$$(a^b b^a)^{\frac{2}{a+b}} = c. \tag{3-9}$$

设$(a, b) = d$是$a$和$b$的最大公因子, 于是$a = a_1 d$, $b = b_1 d$, 且$(a_1, b_1) = 1$. 根据方程(3-9), 我们有

$$a_1^{\frac{2b_1}{a_1+b_1}} b_1^{\frac{2a_1}{a_1+b_1}} d^2 = c. \tag{3-10}$$

方程(3-10)中, 因为$(a_1, b_1) = 1$, $c, d$都是正整数, 故$a_1^{\frac{2b_1}{a_1+b_1}}, b_1^{\frac{2a_1}{a_1+b_1}}$必是正整数.

若$a_1=b_1$, 则方程(3-10)变为$a_1b_1d^2=a^2=c$. 因此所有的正整数$a=b,c=a^2$是Diophantine方程(3-8)的解.

若$a_1\neq b_1$, 我们假设$a_1>b_1$. 下面我们证明$a_1^{\frac{2b_1}{a_1+b_1}}$不是正整数. 事实上, $a_1$的任意素因子$p$, $p^\alpha|a_1, p^{\alpha+1}\nmid a_1$. 若$a_1^{\frac{2b_1}{a_1+b_1}}$是整数, 则有$p^{\frac{2\alpha b_1}{a_1+b_1}}$也是整数, 因此$\frac{2\alpha b_1}{a_1+b_1}$是整数. 注意到$(a_1,b_1)=1$, $(a_1+b_1,b_1)=1$且$\frac{2\alpha b_1}{a_1+b_1}$是整数, 则有

$$a_1+b_1|2\alpha. \tag{3-11}$$

显而易见$p^\alpha|a_1$, 故由(3-11)我们有

$$2\alpha\geq a_1+b_1>a_1=p^\alpha\cdot a_2, \tag{3-12}$$

其中$a_2$是整数.

因为$p$是素数, $\alpha$是正整数, 故有$p^\alpha\cdot a_2\geq p^\alpha\geq 2^\alpha\geq 2\alpha$, 这与(3-12)矛盾. 因此正整数$a$, $b$和$c$满足Diophantine方程(3-8)当且仅当$a=b,\ c=a^2$.

于是完成了定理3.4的证明.

**定理3.5:** *对方程*

$$(a^bb^cc^a)^{\frac{3}{a+b+c}}=d, \tag{3-13}$$

*若$(a,b,c)=t$, $a=a_1t$, $b=b_1t$, $c=c_1t$且$(a_1,b_1)=(a_1,c_1)=(c_1,b_1)=1$, 则$a$, $b$, $c$, $d$不满足上述方程;*

*若$(a,b,c,d)=(t,t,t,t^3)$, $(t,t,4t,2t^3)$, $(4t,t,t,2t^3)$或$(t,4t,t,2t^3)$, 则$a$, $b$, $c$, $d$满足上述方程, 其中$t$是任意的正整数.*

**证明:** 若正整数$a$, $b$, $c$, $d$满足Diophantine方程(3-13). 设$(a,b,c)=t$, $a=a_1t$, $b=b_1t$, $c=c_1t$且$(a_1,b_1,c_1)=1$, 则根据方程(3-13)我们有等式

$$a_1^{\frac{3b_1}{a_1+b_1+c_1}}\cdot b_1^{\frac{3c_1}{a_1+b_1+c_1}}\cdot c_1^{\frac{3a_1}{a_1+b_1+c_1}}\cdot t^3=d. \tag{3-14}$$

若等式(3-14)中$a_1=b_1=c_1$, 因为$(a_1,b_1,c_1)=1$, 则有$a_1=b_1=c_1=1$, $d=t^3$. 故正整数$a=b=c$, $d=a^3$是Diophantine方程(3-13)的解.

若$a_1=b_1<c_1$, 我们将方程(3-14)变形为

$$a_1^{\frac{3(a_1+c_1)}{2a_1+c_1}}\cdot c_1^{\frac{3a_1}{2a_1+c_1}}\cdot t^3=d. \tag{3-15}$$

注意到$(a_1,c_1)=1$, 故$a_1^{\frac{3(a_1+c_1)}{2a_1+c_1}}$和$c_1^{\frac{3a_1}{2a_1+c_1}}$必是整数. 因此对$c_1$的任意素因数$p$, $p^\alpha|c_1,p^{\alpha+1}\nmid c_1$, 必有$\frac{3a_1\alpha}{2a_1+c_1}$是整数或$(2a_1+c_1)|3a_1\alpha$. 又因$(2a_1+c_1,c_1)=1$, 于是我们有$(2a_1+c_1)|3\alpha$或$3\alpha=k(2a_1+c_1)$. 故

$$3\alpha\geq 2a_1+c_1=2a_1+p^\alpha c_2\geq 2a_1+p_\alpha$$

或

$$3\alpha-2a_1\geq p^\alpha.$$

但该不等式成立当且仅当$a_1=1$, $p=2=\alpha$时, 即$a=b=t$, $c=4t$, $d=2t^3$. 换句话说, 对任意的正整数$t$, $a=b=t$, $c=4t$, $d=2t^3$是方程(3-13)的解.

若$a_1=b_1>c_1$, 则对$a_1$的素因子$p$, $p^\beta|a_1$, $p^{\beta+1}\nmid a_1$, 我们有$a_1^{\frac{3(a_1+c_1)}{2a_1+c_1}}$是整数或$(2a_1+c_1)|3(a_1+c_1)\beta$. 又因$(2a_1+c_1,a_1+c_1)=1$, 于是有$(2a_1+c_1)|3\beta$或$3\beta=k(2a_1+c_1)$. 故

$$3\beta\geq 2a_1+c_1,\ 3\beta\geq 2p^\beta.$$

易知这是不可能的, 因为对所有的正整数$\beta$, 总有$3\beta-1<2p^\beta$.

若$a_1>b_1>c_1$, 我们首先证明如果$(a_1,b_1)=(a_1,c_1)=(c_1,b_1)=1$, 则(3-14)不成立. 事实上, 若$(a_1,b_1)=(a_1,c_1)=(c_1,b_1)=1$, 则

$$a_1^{\frac{3b_1}{a_1+b_1+c_1}},\ b_1^{\frac{3c_1}{a_1+b_1+c_1}},\ c_1^{\frac{3a_1}{a_1+b_1+c_1}}$$

必都是正整数. 我们设$(a_1,b_1+c_1)=u$, $(b_1,a_1+c_1)=v$, $(c_1,a_1+b_1)=w$. 因$(a_1,b_1,c_1)=1$, 因此$(u,v)=(v,w)=(w,u)=1$. 若$c_1=1$或2, 则$b_1^{\frac{3a_1}{a_1+b_1+c_1}}$不是正整数. 不失一般性, 我们假设$c_1\geq 3$. 如果$u\leq\sqrt[2]{a_1}$, 则$c_1^{\frac{3a_1}{a_1+b_1+c_1}}$不是正整数. 否则, 对$c$的素因子$p$, $p^\alpha|c_1$,$p^{\alpha+1}\nmid c_1$, 我们有$\frac{3a_1\alpha}{a_1+b_1+c_1}$是正整数, 即$3a_1\alpha=t(a_1+b_1+c_1)$或$\frac{3a_1\alpha}{u}=t\cdot\frac{a_1+b_1+c_1}{u}$. 又因$(\frac{a_1}{u}),\frac{a_1+b_1+c_1}{u})=1$, 于是有$\frac{a_1}{u}|t$. 故

$$3\alpha=t_2\cdot\frac{a_1}{u^2}\cdot(a_1+b_1+c_1)\geq a_1+b_1+c_1\geq 3c_1+3\geq 3p^\alpha+3.$$

这是不可能的. 同理, 如果$v\leq\sqrt[2]{b_1}$或$w\leq\sqrt[2]{c_1}$, 则$a_1^{\frac{3b_1}{a_1+b_1+c_1}}$或$b_1^{\frac{3c_1}{a_1+b_1+c_1}}$不是整数. 因此我们假设$u>\sqrt[2]{a_1}$, $v>\sqrt[2]{b_1}$, 及$w>\sqrt[2]{c_1}$.

如果$\sqrt[2]{a_1} < u \le \frac{a_1}{2}$, 注意到$u|a_1+b_1+c_1$, $v|a_1+b_1+c_1$和$w|a_1+b_1+c_1$, 故$c_1^{\frac{3a_1}{a_1+b_1+c_1}}$不是整数. 事实上, 对任意的素因子$p$, $p^\alpha|c_1$,$p^{\alpha+1}\dagger c_1$, $\frac{3a_1\alpha}{a_1+b_1+c_1}$必是整数, 于是我们有$3a_1\alpha = t(a_1+b_1+c_1)$或

$$3\alpha = t_2 \cdot \frac{a_1}{u} \cdot v \cdot w \cdot x \ge 2v \cdot w \ge 2c_1 \ge 2p^\alpha.$$

这是不可能的.

同理, 如果$\sqrt[2]{c_1} < w \le \frac{c_1}{2}$, 则$b_1^{\frac{3c_1}{a_1+b_1+c_1}}$不是整数.

若$w > \frac{c_1}{2}$, $u > \frac{a_1}{2}$, 注意到$u|a_1$, $w|c_1$, 因此我们有$a_1 = u$, $c_1 = w$. 又根据$u|a_1+b_1+c_1$, $v|a_1+b_1+c_1$和$(u,w)=1$, 我们有$u\cdot w|a_1+b_1+c_1$. 故

$$a_1+b_1+c_1 \ge u\cdot w = a_1\cdot c_1 \ge 3a_1 \ge a_1+b_1+c_1.$$

这是不可能的.

由上面的讨论可知, 若$a_1 > b_1 > c_1$且$(a_1,b_1) = (a_1,c_1) = (c_1,b_1) = 1$, 则(3-14)不成立.

综上所述, 若$(a,b,c) = t$, $a = a_1t$, $b = b_1t$, $c = c_1t$且$(a_1,b_1) = (a_1,c_1) = (c_1,b_1) = 1$, 则$a$, $b$, $c$不满足方程(3-13). 若$(a,b,c,d) = (t,t,t,t^3)$, $(t,t,4t,2t^3)$, $(4t,t,t,2t^3)$或$(t,4t,t,2t^3)$, 则$a$, $b$, $c$, $d$满足方程(3-13).

即完成了定理3.5的证明.

但是方程(3-13)是否还有其它正整数解仍有待讨论.

**问题3.16:** 寻求方程

$$y^n = nx^n + 1 \tag{3-16}$$

的所有正整数解, 其中$3 \le n \in N$.

**注:** 该问题是Kenichiro Kashihara博士在数论中原来就提出的问题. 我们很容易找出$n=2$时方程(3-15)解. 现在的问题是, 找出当$n$具备何种条件时方程有正整数解, 这是比较难解决的问题.

**猜想3.8:** 当$n \ge 3$时, 方程(3-15)没有正整数解.

**问题3.17:** 寻求方程

$$\frac{\lfloor (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{3})^n \rfloor}{2}$$

的所有正整数解, 其中$\lfloor x\rfloor$是不超过$x$的最大正整数.

**注:** 这类奇偶性的问题很难解决. 如果我们找出$\lfloor(1+\sqrt{2})^n\rfloor$的奇偶性, 我们就可用它的共轭数$\lfloor(1-\sqrt{2})^n\rfloor$解决该问题.

## 3.14 悖论

1) 随机悖论.

什么是随机性? 它的定义的给出是依据科学的方式还是凭人们的感觉? 在同一水平线上, 我们如何随意安排事情呢? 这样的问题是不是合理的? 随机性和无规律性是否有相同的概念? 若安排好的事情具有规律性, 假使我们重新安排这些事情, 这时重新安排的结果是否具有随意性?

1) 上帝悖论.

我们不能否认至高无上的人类的存在, 因为我们是通过自己的智慧用自己的方式去认知事物的. 如果我们不能通过科学的方法证明上帝的存在, 则我们仅能知道我们的方法发现不了上帝. 迄今, 上帝是否存在仍是一个神秘话题, 因此我们不能否认上帝的存在性.

# 第四章 关于Smarandache函数的一些新注释

## 4.1 引言

这一章, 我们给出了关于Smarandache函数的一些新注释, 可供大家选择研究.

## 4.2 Goldbach猜想的拓展

下面我们将提出一些关于由素数和表示的整数的猜想, 它们是对Goldbach猜想的拓展.

**定义4.1:** *设$n$是任意偶数, $n = p + q - r$, 其中$p, q, r$都是素数. 易见它不包含平凡解: $p = p + q - r$.*

例如:

$$1 = 3 + 5 - 7 = 5 + 7 - 11 = 7 + 11 - 17 = 11 + 13 - 23 = \cdots,$$

$$3 = 5 + 5 - 7 = 7 + 19 - 23 = 17 + 23 - 37 = \cdots,$$

$$5 = 3 + 13 - 11 = \cdots,$$

$$7 = 11 + 13 - 17 = \cdots.$$

**问题4.1:** 当$n \geq 9$时, 该猜想是否等价于Goldbach猜想?

**问题4.2:** *当三个素数互不相同时, 该猜想是否成立?*

**问题4.3:** *每个偶数存在多少种表示方法使其可以表示为三个素数之和?*

**定义4.2:** *设$n$是任意偶数, $n = p - q - r$, 其中$p, q, r$都是素数.*

例如:

$$1 = 13 - 5 - 7 = 17 - 5 - 11 = 19 - 5 - 13 = \cdots,$$

$$3 = 13 - 3 - 7 - 7 = 23 - 7 - 13 = \cdots,$$

$$5 = 13 - 3 - 5 = \cdots,$$

$$7 = 17 - 3 - 7 = \cdots.$$

**问题4.4:** 该猜想是否等价于Goldbach猜想?

**问题4.5:** 当三个素数互不相同时, 该猜想是否成立?

**问题4.6:** 每个偶数存在多少种表示方法使其可以表示为三个素数之和?

**定义4.3:** 设$n$是任意偶数, $n = p + q + r + t - u$, 其中$p, q, r, t, u$都是素数, 且$t \neq u$.

例如:

$$1 = 3 + 3 + 3 + 5 - 13 = 3 + 5 + 5 + 17 - 29 = \cdots,$$

$$3 = 3 + 5 + 11 + 13 - 29 = \cdots,$$

$$5 = 3 + 7 + 11 + 13 - 29 = \cdots,$$

$$7 = 5 + 7 + 11 + 17 - 29 = \cdots.$$

**问题4.7:** 当五个素数互不相同时, 该猜想是否成立?

**问题4.8:** 每个偶数存在多少种表示方法使其可以表示为五个素数之和?

**定义4.4:** 设$n$是任意偶数, $n = p + q + r - t - u$, 其中$p, q, r, t, u$都是素数, 且$t, u \neq p, q, r$.

例如:

$$1 = 3 + 7 + 17 - 13 = 3 + 7 + 23 - 13 - 19 = \cdots,$$

$$3 = 5 + 7 + 17 - 13 - 13 = \cdots,$$

$$5 = 7 + 7 + 17 - 13 - 13 = \cdots,$$

$$7 = 5 + 11 + 17 - 13 - 13 = \cdots.$$

**问题4.9:** 同问题4.7和4.8.

**定义4.5:** 设$n$是任意偶数, $n = p + q - r - t - u$, 其中$p, q, r, t, u$都是素数, 且$r, t, u \neq p, q$.

例如:

$$1 = 11 + 13 - 3 - 3 - 17 = \cdots,$$

$$3 = 13 + 13 - 3 - 3 - 17 = \cdots,$$

$$5 = 5 + 29 - 5 - 5 - 17 = \cdots,$$

$$7 = 3 + 31 - 5 - 5 - 17 = \cdots.$$

**问题4.10:** 同问题4.7和4.8.

**定义4.6:** 设$n$是任意偶数, $n = p - q - r - t - u$, 其中$p, q, r, t, u$都是素数, 且$q, r, t, u \neq p$.

例如:

$$1 = 13 - 3 - 3 - 3 - 3 = \cdots,$$

$$3 = 17 - 3 - 3 - 3 - 5 = \cdots,$$

$$5 = 19 - 3 - 3 - 3 - 5 = \cdots,$$

$$7 = 23 - 3 - 3 - 5 - 5 = \cdots.$$

**问题4.11:** 同问题4.7和4.8.

**定义4.7:** 设$k \geq 3$, $1 < s < k$是整数.则

$(a)$ 若$k$为偶数, $n$为任意偶数, 有$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-s} - q_1 - q_2 - \cdots - q_s$, $p_i \neq q_j$, $i = 1, 2, \cdots, k - s$, $j = 1, 2, \cdots, s$.

**问题4.12:** 若$k$个素数互不相同, 该猜想是否成立?

**问题4.13:** 每个偶数存在多少种表示方法使其可以表示为$k$个素数之和?

$(b)$ 若$k$为奇数, $n$为任意奇数, 有$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-s} - q_1 - q_2 - \cdots - q_s$, $p_i \neq q_j$, $i = 1, 2, \cdots, k - s$, $j = 1, 2, \cdots, s$.

**问题4.14:** 同问题4.12和4.13.

## 4.3 毗连型序列

**定义4.8:** 设$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots$是一个无穷整数序列, 定义毗连类型序列如下:

$$s_1, \overline{s_1 s_2}, \overline{s_1 s_2 s_3}, \cdots.$$

H.Ibstedt建议我们研究一种特殊的例子, 毗连$S-$序列中有多少项属于初始的$S-$序列.

## 4.4 拆分序列

设$f$是一个算术函数, $R$是数中的$K$关系.

**问题4.15:** $n$存在多少种如下表达方式:

$$n = R(f(n_1), f(n_2), \cdots, f(n_k)).$$

**问题4.16:** 我们研究一种特例, $k$个数$n_1, n_2, \cdots, n_k$满足$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. 试问$n$能表示为非空平方数、立方数的拆分有多少种?

## 4.5 素数数位子序列

**定义4.9:** 素数数位子序列为有序的素数集合且这些素数的各个数位都是素数.

该数列的前几项为:

$$2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 223, 227, 233, 257, 277, \cdots.$$

**问题4.17:** Sylvester Smith猜想该序列是无穷序列.

## 4.6 完全幂的特殊表达式

**问题4.18:** 特殊表达式$x^y + y^x$中存在多少个素数, 其中$gcd(x, y) = 1$, $gcd$表示$x$和$y$的最大公因数.

F.Luca提出以下猜想:

**猜想4.1:** 设$a, b, c$为三个非空整数, 方程

$$ax^y + by^x = cz^n$$

有有限个解$(x,y,z,n)$, 其中$x,y,n\geq 2$且$gcd(x,y)=1$, $gcd$表示$x$和$y$的最大公因数.

## 4.7 广义周期序列

**定义4.10:** 设$S$是有限集合, 对$S$中的任何元素, $f$是$S$到$S$上的函数, 定义广义周期序列为:

$a_1=f(s)$, 其中$s$是$S$中的元素;

$a_2=f(a_1)=f(f(s))$;

$a_3=f(a_2)=f(f(a_1))=f(f(f(s)))$, 依次类推.

**问题4.19:** 给定$S$和$f$, 研究该序列的性质.

## 4.8 Numberical Carpet序列

该序列有一般形式如下:

$$\begin{array}{c}
1\\
1\ a\ 1\\
1\ a\ b\ a\ 1\\
1\ a\ b\ c\ b\ a\ 1\\
1\ a\ b\ c\ d\ c\ b\ a\ 1\\
1\ a\ b\ c\ d\ e\ d\ c\ b\ a\ 1\\
1\ a\ b\ c\ d\ c\ b\ a\ 1\\
1\ a\ b\ c\ b\ a\ 1\\
1\ a\ b\ a\ 1\\
1\ a\ 1\\
1
\end{array}$$

第0层边界的元素是"1", 它们构成菱形. 接下来, 第1层边界的边界的元素是"$a$", 其中"$a$"是上一层边界的所有元素的和; 这些"$a$"构成在上一个菱形里面的菱形.接下来，和上面一样第2层边界的边界的元素是"$b$", 其

中"$b$"是上一层边界的所有元素的和; 这些"$a$"构成在上一个菱形里面的菱形. 依次类推$\cdots$. 这个序列形式上是对称的而且是具有美感的, 在其正中间的$g$是所有元素的和.

该序列可表示为:

1
1 4
1 8 40
1 12 108 540
1 16 208 1872 9360
1 20 340 4420 39780 198900
1 24 504 8568 111384 1002456 5012280
1 28 700 14700 249900 3248700 29238300 146191500
1 32 928 23200 487200 8282400 107671200 969040800 4845204000

将第一行1去除后的通式为: 令$C(n,\ k)$表示第$n$行的第$k$列的数, 其中$n \geq 0,\ k \geq 0$.

$C(n,\ 0) = 1$;

$C(n,\ 1) = 4(n+1)$;

$C(n,\ k) = 4(n+1)\prod\limits_{i=0}^{k-2}(4n+1-4i),\ 2 \leq k \leq n+1.$

赵艳琳研究了该序列, 得出了$\{C(n,\ k)\}$的一些性质(该结论将发表于《Scientia Magna》):

设$n$是正整数, 对任意的素数$p$, 若$4n-4k+9 \leq p \leq 4n+1$并且$p \equiv 1 \bmod$, 则有$C(n,\ k) \equiv 0 \bmod p$; 若$n-k+3+\left[\dfrac{n-k+2}{3}\right] \leq p \leq n+\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$ 并且$p \equiv 3 \bmod 4$, 有$C(n,\ k) \equiv 0 \bmod p$.

## 4.9 筛序列

**定义4.11:** *无平方因子筛序列:*

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 22,\ 23,\ 29,$$

$$31,\ 33,\ 34,\ 35,\ 37,\ 38,\ 39,\ 41,\ 42,\ 43,\ 46,\ 51,\ 53,\ 55,\cdots.$$

*易见该序列是由自然数集合(除去0和1)中除去所有$kp^2$的数构成的, 其中$p$为任意素数, $k \geq 2$.*

**问题4.20:** 研究该序列的性质.

根据无平方因子筛序列, 我们还给出了其他的筛序列:

**定义4.12:** 无立方因子筛序列是由自然数集合(除去0和1)中除去所有$kp^2$的数构成的, 其中$p$为任意素数, $k \geq 2$.

该序列的前几个值为:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,$$

$$17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 25,\ 26,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 33,\ 34,\cdots.$$

**问题4.21:** 同问题4.20.

**定义4.13:** 无$m$次幂筛序列是从自然数集合(除去0和1)中除去所有$kp^m$的数构成的, 其中$p$为任意素数, $k \geq 2$, $m \geq 2$. 例如, 当去$m = 2$时, 该序列就是无平方因子筛序列.

**问题4.22:** 同问题4.20.

**定义4.14:** 对任意的正奇数$n$, 如果它不能表示为两个素数的差, 那么它就属于奇数筛序列.

它的前几个值为:

$$7,\ 13,\ 19,\ 23,\ 25,\ 31,\ 33,\ 37,\ 43,\ 47, 9,\ 53,\ 55,\cdots.$$

**问题4.23:** 同问题4.20.

**定义4.15:** 无理根筛序列是从自然数集合(除去0和1)中除去所有$2^k (k \geq 2)$(例如,4, 8, 16, 32, 64, $\cdots$), 再除去$3^k (k \geq 2)$, $\cdots$, 即就是除去所有无平方因子的$k (k \geq 2)$次幂后剩余的数构成的序列.

该序列的前几项为:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\cdots.$$

**问题4.24:** 同问题4.20.

## 4.10 Syllabic Puzzle序列

**定义4.16:** Syllabic Puzzle序列为:

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 3,\ 4,\ 2,\cdots.$$

易知该序列的第$n$项是$n$在英语中的音节数.

**问题4.25:** 求该序列的通式.

## 4.11 Code Puzzle序列

**定义4.17:** 运用字母与数字的对应码:

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ M,\ N,\ O,\cdots,$$

$$01,\ 02,\ 03,\ 04,\ 05,\ 06,\ 07,\ 08,\ 09,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\cdots.$$

序列的第$n$项是$n$在英语中的拼写所对应的数字码, 则称该序列为Code Puzzle序列. 例如: $1 = ONE = 151405$.

序列的前几项为:

$$51405,\ 202315,\ 2008180505,\ 06152118,\ 06092205,\cdots.$$

**问题4.26:** 研究这个序列的性质.

**问题4.27:** 该序列中存在多少个素数?

## 4.12 幂序列

**定义4.18:** 2的幂序列定义为$a(n) = k$, 其中$2^k \mid n$, $2^{k+1} \nmid n$.

序列的前几项为:

$$0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 4,\cdots.$$

**问题4.28:** 同问题4.26和4.27.

**定义4.19:** 3的幂序列定义为$b(n) = k$, 其中$3^k \mid n$, $3^{k+1} \dagger n$.

**问题4.29:** 同问题4.26和4.27.

**定义4.20:** $p$的幂序列定义为$c(n) = k$, 其中$p^k \mid n$, $p^{k+1} \dagger n$, $p$为任意素数.

**问题4.30:** 同问题4.26和4.27.

## 4.13 伪阶乘序列

**定义4.21:** 对任意的正整数$n$, 若它本身或它的数位置换是阶乘数, 则称这个数是第一类伪阶乘数.

该序列的前几项是:

$$1,\ 2,\ 6,\ 10,\ 20,\ 24,\ 42,\ 60,\ 100,\ 102,\ 120,\ 200, \cdots.$$

**注:** 所有阶乘数都是第一类伪阶乘数, 反之不成立.

**定义4.22:** 对任意的非阶乘数$n$, 若它的某个数位置换是阶乘数, 则称这个数是第二类伪阶乘数.

该序列的前几项是:

$$10,\ 20,\ 42,\ 60,\ 100,\ 102,\ 200,\ 201,\ 204,\ 207,\ 210,\ 240, \cdots.$$

**定义4.23:** 对任意正整数$n$, 若它的某个数位的非平凡置换是阶乘数, 则称这个数是第三类伪阶乘数.

该序列的前几项是:

$$10,\ 20,\ 42,\ 60,\ 100,\ 102,\ 200,\ 201,\ 204,\ 207,\ 210,\ 240, \cdots.$$

**问题4.31:** 研究这些幂序列的性质.

**问题4.32:** 第三类伪阶乘序列中有多少项是阶乘数? 我们猜想没有!

## 4.14 伪因子序列

**定义4.24:** 对任意正整数$n$, 若一个数本身或它的某个数位置换是$n$的因子, 则称其为$n$的第一类伪因子.

该序列的前几项是:

$$1,\ 10,\ 100,\ 1,\ 2,\ 10,\ 20,\ 100,\ 200,\ 1,\ 3,\ 100,\cdots.$$

**注:** 所有$n$的因子都是第一类伪因子数, 反之不成立. 任何整数都有无限项第一类伪因子数! 因为$10\ldots0$的一个循环置换为$0\ldots01=1$, 并且1整除任何整数!

**定义4.25:** 对任意正整数$n$, 若一个数本身不是$n$的因子但它的某个数位置换是$n$的因子, 则称其为$n$的第二类伪因子.

该序列的前几项是:

$$10,\ 100,\ 10,\ 20,\ 100,\ 200,\ 10,\ 30,\ 100,\ 300,\ 10,\ 20,\cdots.$$

**注:** 任何整数都有无限项第二类伪因子数! 因为$10\ldots0$的一个循环置换为$0\ldots01=1$, 并且1整除任何整数!

**定义4.26:** 对任意正整数$n$, 若一个数某个非平凡数位置换是$n$的因子, 则称其为$n$的第三类伪因子.

该序列的前几项是:

$$10,\ 100,\ 10,\ 20,\ 100,\ 200,\ 10,\ 30,\ 100,\ 300,\ 10,\ 20,\cdots.$$

**问题4.33:** 研究这些伪因子序列的性质.

## 4.15 伪偶数序列

**定义4.27:** 任意的非负整数$n$, 若它本身或它的某个数位置换是偶数, 则它是第一类伪偶数.

该序列的前几项为:

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 21, \cdots.$$

**注:** 所有的偶数是第一类伪偶数, 反之不成立.

**定义4.28:** 任意的正奇数$n$, 若它的某个数位置换是偶数, 则它是第二类伪偶数.

该序列的前几项为:

$$21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 41,\ 43,\ 45,\ 47,\ 49,\ 61,\ 63, \cdots.$$

**定义4.29:** 任意的非负整数$n$, 若它的某个非平凡数位置换是偶数, 则它是第三类伪偶数.

该序列的前几项为:

$$20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 40,\ 41, \cdots.$$

**问题4.34:** 研究这些伪偶数序列的性质.

## 4.16 伪奇数序列

**定义4.30:** 任意的正整数$n$, 若它的某个数位置换是奇数, 则它是第一类伪奇数.

该序列的前几项为:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15, 6, \cdots.$$

**定义4.31:** 任意的偶数$n$, 若它的某个数位置换是奇数, 则它是第二类伪奇数.

该序列的前几项为:

$$10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 30,\ 32,\ 34,\ 36,\ 38, \cdots.$$

**定义4.32:** 任意的正整数$n$, 若它的某个非平凡数位置换是奇数, 则它是第三类伪奇数.

该序列的前几项为:

$$10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19, \cdots.$$

**问题4.35:** 研究这些伪奇数序列的性质.

## 4.17 伪倍数序列

**定义4.33:** 设$n \geq 2$, 对任意正整数$k$, 若它本身或它的某个数位置换是$n$的倍数, 则称该数为$n$的第一类伪倍数.

**注:** 所有的$n$的倍数是$n$的第一类伪倍数, 反之不成立.

**定义4.34:** 设$n \geq 2$, 对任意正整数$k$, 若它不是$n$倍数, 但是它的某个数位置换是$n$倍数, 则称它为$n$的第二类伪倍数序列.

**定义4.35:** 设$n \geq 2$, 对任意正整数$k$, 若它的某个非平凡数位置换是$n$的倍数, 则称该数为$n$的第三类伪倍数.

**问题4.36:** 研究这些伪倍数序列的性质.

## 4.18 伪triangular number序列

**定义4.36:** 任意的正整数$n$, 若它的某个置换是一个triangular number, 则称它是伪triangular number.

**注:** 一个triangular number具有下面的一般形式: $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

**问题4.37:** 研究该序列的性质.

## 4.19 Smarandache-Kurepa 函数

**定义4.37:** 任意的素数$p$, $SK(P)$为满足$p\ |!SK(P)$的最小正整数, 其中$!SK(P) = 0! + 1! + 2! + \cdots + (p-1)!$.

$SK(P)$的前几个值可见如下图表:

| $n$ | $SK(P)$ | $n$ | $SK(P)$ | $n$ | $SK(P)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 17 | 5 | 37 | 22 |
| 3 | 4 | 19 | 7 | 41 | 16 |
| 7 | 6 | 23 | 7 | 61 | 55 |
| 11 | 6 | 31 | 12 | 71 | 54 |

**问题4.38:** 研究该函数的性质.

## 4.20 Smarandache-Wagstaff 函数

**定义4.38:** 任意的素数$p$, $SW(P)$为满足$p \mid W(SK(P))$的最小正整数, 其中$W(P) = 0! + 1! + 2! + \cdots + (p)!$.

$SW(P)$的前几个值可见如下图表:

| $n$ | $SW(P)$ | $n$ | $SW(P)$ | $n$ | $SW(P)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 29 | 19 | 53 | 20 |
| 11 | 4 | 37 | 24 | 67 | 20 |
| 17 | 5 | 42 | 32 | 23 | 7 |
| 23 | 12 | 43 | 19 | 79 | 57 |

**问题4.39:** 研究该函数的性质.

## 4.21 $n$阶Smarandache上取整函数

**定义4.39:** 对任意的正整数$n$, $SK(n)$为满足$n \mid SK(n)^k$的最小正整数.

当$1 \leq n \leq 12$时, $SK(n)$的前几个值可见如下图表:

| $n$ | $SK(n)$ | $n$ | $SK(n)$ | $n$ | $SK(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 10 | 9 | 14 |
| 2 | 4 | 6 | 12 | 10 | 8 |
| 3 | 3 | 7 | 5 | 11 | 6 |
| 4 | 6 | 8 | 9 | 12 | 20 |

**问题4.40:** 研究该函数的性质.

## 4.22 Smarandache Near-To-Primordial 函数

**定义4.40:** 任意的正整数$n$, $SNTP(n)$为满足$n$整除$p-1, p$, 或者$p+1$的最小素数.

当$1 \leq n \leq 8$时, $SNTP(n)$的前几个值可见如下图表:

| $n$ | $SNTP(n)$ | $n$ | $SNTP(n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 2 | 6 | 3 |
| 3 | 2 | 7 | 3 |
| 4 | 5 | 8 | 5 |

**问题4.41:** 研究该函数的性质.

# 参考文献

[1] Kenichiro Kashihara, Comments and topics on Smarandache notions and problems, Erhus University Press, USA, 1996.

[2] F. Smarandache, Only Problems, Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[3] Tom M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.

[4] F.Mark, M.Patrick, Bounding the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, 13(2002), No.1-2-3.

[5] 张文鹏等, 初等数论, 陕西师范大学出版社, 西安, 2007.

[6] 潘承洞, 潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 北京, 1999, 202-205.

[7] 潘承洞, 潘承彪, 素数定理的初等证明, 上海科学技术出版社, 上海, 1988.

[8] 潘承洞, 潘承彪, 歌德巴赫猜想, 科学出版社, 北京, 1992.

[9] 闵嗣鹤, 严士健, 初等数论, 高等教育出版社, 北京, 1982.

[10] P.Erdös, Problem 6674, Amer. Math. Monthly, Vol.98, 1991, 965.

[11] A.Murthy, Generalized Partitions and New Ideas On Number Theory and Smarandache Sequences, Hexis, 2005, 20-22.

[12] D.R.Heath-Brown, The differences between consecutive primes, Journal of London Math. Soc., (2) 18 (1978), 7-13.

[13] D.R.Heath-Brown, The differences between consecutive primes, Journal of London Math. Soc., (2) 19 (1979), 207-220.

[14] H.N.Shapiro, Introduction to theory of numbers, John Wiley and Sons, 1983, 181.

[15] Charles Ashbacher, An Introduction to the Smarandache Function, Erhus University Press, Vail, 1995.

[16] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 北京, 1977, 25.

[49] Aledsandar Ivić, The Riemann zeta-function theory, New York, 1985, 407-413.

[17] Gou Su and Li Jianghua, On the Smarandache pierced chain, Scientia Magna, 4(2008), No.1, 44-45.

[18] Yan Xiaoxia, On the Smarandache prime part, Scientia Magna, 3(2007), No.3, 74-77.

[19] Guo Yanchun, About Smarandache prime additive complement, Scientia Magna, 3(2007), No.3, 108-109.

[20] 郭艳春, 路玉麟, 关于Smarandache素数可加补数列, 纺织高校基础科学学报, 21(2008), No.1, 128-130.

[21] Qin Wei, On a problem related to the Smarandache function, Scientia Magna, 4(2008), No.3, 106-108.

[22] Cai Lixiang, On an equation of the Smarandache function, Scientia Magna, 4(2008), No.3, 71-73.

[23] Le Maohua, A lower bound for $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$, Smarandache Notions Journal, 12(2001), No.1-2-3, 217-218.

[24] Wang Jinrui, On the Smarandache function and the Fermat number, Scientia Magna, 4(2008), No.2, 25-28.

[25] 熊文井, 关于Smarandache函数的奇偶性, 纯粹数学与应用数学, 24(2008), No.2, 363-366.

[26] 张爱玲, 关于F.Smarandache函数的一个问题, 纯粹数学与应用数学, 24(2008), No.2, 385-387.

[27] 张福林, 李江华, 关于Smarandache函数的均值, 西北大学学报，38(2008), No.4, 531-532.

[28] Wang Jianping, On the value distribution properties of the Smarandache double factorial function, Scientia Magna, 3(2007), No.4, 111-114.

[29] Xu Zhefeng, On the mean value of the Smarandache power function, Acta Mathematica Sinica (Chinese series), 49(2006), No.1, 77-80.

[30] Wang Xiaoying, On certain equations involving the Smarandache double-factorial function, Scientia Magna, 4(2008), No.1, 56-59.

[31] Liu Yaming, On the solutions of an equation involving the Smarandache function, Scientia Magna, 2(2006), No.1, 76-79.

[32] Yi Yuan, On the primitive numbers of power $p$ and its asymptotic property, Scientia Magna, 1(2005), No.1, 175-177.

[33] G.H.Hardy, E M.Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, Oxford, 1981.

[34] Li Jianghua, A problem related to twin primes, Scientia Magna, 4(2008), No.1, 72-75.

[35] Pan Chengdong and Pan Chengbiao, Elementary Number Theory, Beijing University Press, Beijing, 2003.

[36] Fu Jing and Wang Yu, A new Smarandache function and its elementary properties, Scientia Magna, 4(2008), No.3, 26-28.

[37] Zhang Wenpeng, On an equation of Smarandache and its integer solutions,

Smarandache Notions Journal, Vol.13(2002), 176-178.

[38] Zheng Yani, On the pseudo Smarandache function and its two conjectures, Scientia Magna, 3(2007), No.4, 74-76.

[39] David Gorski, The pseudo-Smarandache functions, Smarandache Notions Journal, Vol.12(2000), 140-145.

[40] Gou Su and Li Jianghua, On the Pseudo Smarandache function, Scientia Magna, 3(2007), No.4, 81-83.

[41] 张文鹏, 关于F.Smarandache函数的两个问题, 西北大学学报, 38(2008), No.2, 173-175.

[42] 阎晓霞, 一个包含伪Smarandache函数及Smarandache函数的方程, 纯粹数学与应用数学, 24(2008), No.2, 372-34.

[43] Zhang Wenpeng and Li Ling , On the pseudo Smarandache function and its two conjectures, Scientia Magna, 4(2007), No.2, 1-3.

[44] 杨明顺, 关于伪Smarandache函数的一个问题, 纯粹数学与应用数学, 24(2008), No.3, 449-451.

[45] Lou Yuanbing, On the pseudo Smarandache function, Scientia Magna, 3(2007), No.4, 48-50.

[46] Aledsandar Ivić, The Riemann zeta-function theory, New York, 1985, 407-413.

[47] 关文吉, 郑亚妮, 关于伪Smarandache函数的方程, 纺织高校基础科学学报, 21(2008), No.2, 151-153.

[48] Russo Felice, A set of new Smarandache function, sequences and conjectures in number therory, Lupton USA: American Research Press, 2000.

[49] 张爱玲, 关于伪Smarandache函数的一个方程及其正整数解, 西北大学学报, 34(2008), No.4, 531-532.

[50] Jozsef Sandor, On a Conjecture of Smarandache on prime numbers, Smarandache Notions Journal, 10(2000), No.1-2-3.

[51] 刘燕妮, 李玲, 刘宝利, Smarandache未解决的问题及其新进展, High American Press, 2008, 127-129.

[52] Ding Zhengshang, Diophantine equations and their positive integer solutions, Scientia Magna, 3(2007), No.4, 77-80.

[53] 易媛, 亢小玉, Smarandache问题研究, High American Press, 2006.

[54] 陈国慧, Smarandache问题新进展, High American Press, 2007.

# On The Smarandache Notions And Related Problems

**Wang Yu**
**Department of Mathematics**
**Northwest University**
**Xi'an, Shaanxi, 710127**
**P. R. China**

**Su Juanli**
**Department of Pulic Teaching**
**Yangling Vocational and Technical College**
**Yangling, Shaanxi, 712100**
**P. R. China**

**Zhang Jin**
**Department of Mathematics**
**Xi'an Normal School**
**Xi'an, Shaanxi, 710001**
**P.R.China**

**High American Press**

**2008**

责任编辑：蔡立翔

封面设计：高　鹏

本书主要将目前中国学者关于Smarandache理论和问题的部分研究成果及其他学者提出的新问题汇编成册，其主要目的在于向读者介绍关于Smarandache理论和问题的一些最新的研究成果，包括Smarandache函数及相关函数的渐近性质、恒等式与特殊函数方程的解等一系列问题，并提出了关于这些函数的一些新问题。希望有兴趣的读者可以对这些问题进行研究，从而开拓读者的视野，引导和激发读者对这些领域的研究兴趣。

**This book will mainly be compiled by the research results of current domestic scholars on Smarandache notions and new problems, plus new problems posed by various scholars. Its main purpose is to introduce latest results about Smarandache notions and problems, including asymptotic properties of Smarandache function and related functions, identities and the solutions of special equations, and put forward to some new interesting problems. We hope that the interested readers could do some research on these issues. At the same time, this book could broaden the reader's perspective, guide and inspire the readers to these fields.**

ISBN 1-59973-075-8

53995>

9 781599 730752