DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2006.05.005
2006年9月 渭南师范学院学报 Sep.t 2006
第21卷第5期 Journal of Weinan Teachers College Vol.21 No.5

逼近Smarandache函数的变形

薛社教, 闫春亮
(渭南师范学院 数学系, 陕西 渭南 714000)

摘 要: 函数 K(n)是在 A. W. Vyawhare定义的逼近 Smarandache函数. 文章定义了一个新的函数 S(n), 其中 $n\in N^*$, 它是通过升高相关次数对 K(n)的一个变形, 因此这个函数是逼近 Smarandache函数的一个推广. 通过对 n分类, 讨论了函数 S(n)一些相应的性质.

关键词: Smarandache函数; 逼近 Smarandache函数; 方程; 收敛; 极限
中图分类号: O15 文献标识码: A 文章编号: 1009-5128(2006)05-0015-04
收稿日期: 2006-01-12
作者简介: 薛社教(1965-), 男, 陕西渭南人, 渭南师范学院数学系讲师.

0 引言

为了更进一步研究逼近 Smarandache函数, 我们给出它的一个函数变形, 这个新的函数 S(n)定义如下:

$S: N^*\to N^*$, $S(n)=m$, 这里 $m=\sum n^2+k$, 且 k是 n^2整除 m时的最小正整数.

表 1是当 $n\leqslant 25$时 S(n)的值.

表 1 Values of S(n) for n = 1 To 25

n	n^2	$\sum n^2$	k	S(n)
1	1	1	1	2
2	4	9	3	12
3	9	36	9	45
4	16	100	12	112
5	25	225	25	250
6	36	441	27	468
7	49	784	49	833
8	64	1296	48	1344
9	81	2025	81	2106
10	100	3025	75	3100
11	121	4356	121	4477
12	144	6084	108	6192
13	169	8281	169	8450
14	196	11025	147	11172
15	225	14400	225	14625
16	256	18496	192	14848
17	289	23409	289	23698
18	324	29241	243	29484
19	361	36100	361	36461
20	400	44100	300	44400
21	441	53361	441	53802
22	484	64009	363	64372
23	529	76176	529	76705
24	576	90000	432	90432
25	625	105625	625	106250

1　主要性质

性质 1　当 n是奇数时 $k=n^2$，当 n是偶数时 $k=3n^2/4$.

证明　(1)当是奇数时：

$\because (n+1)$是偶数且$(n+1)^2/4$是整数，

$\therefore \sum n^3 = n^2(n+1)^2/4$是 n^2 的倍数，

$\therefore n^2$整除$\sum n^3$，

$\therefore n^2$整除$\sum n^3 + k$当且仅当 n^2整除 k即 k是 n^2的倍数，

$\therefore k$的最小值是 $k=n^2$.

(2)当 n是偶数时：

$\sum n^3 + k = n^2(n+1)^2/4 + k = (n^4 + 2n^3)/4 + n^2/4 + k$，

$\because n$是偶数，

$\therefore n^2/4$是整数且$(n^4 + 2n^3)/4$是被 n^2整除的，

$\therefore n^2$整除$\sum n^3 + k$当且仅当 n^2整除 $n^2/4 + k$，有 $n^2 \leqslant n^2/4 + k$，

$\because k \in N^*$，

$\therefore k$的最小值为 $k=3n^2/4$.

性质 2　当 n是奇数时 $S(n) = n^2(n^2+2n+5)/4$，当 n是偶数时 $S(n) = n^2(n^2+2n+4)/4$

证明　我们知：$S(n) = \sum n^3 + k = n^2(n+1)^2/4 + k$

$\because$当 n是奇数时 $k=n^2$，　　$\therefore S(n) = n^2(n^2+2n+5)/4$.

$\because$当 n是偶数时 $k=3n^2/4$　　$\therefore S(n) = n^2(n^2+2n+4)/4$.

性质 3　$\forall n \in N^*$ 有 $n^2(n^2+2n+4)/4 \leqslant S(n) \leqslant n^2(n^2+2n+5)/4$

证明　$\because$无论 n是奇数还是偶数 $S(n)$或者是 $n^2(n^2+2n+5)/4$，或者是 $n^2(n^2+2n+4)/4$

$\therefore \forall n \in N^*$ 都有

$$n^2(n^2+2n+5)/4 \leqslant S(n) \leqslant n^2(4n^2+2n+1)/4.$$

性质 4　$\forall n \in N^*$，$S(n) > n^2$.

证明　$\because S(n) \geqslant n^2(n^2+2n+4)/4 = n^2 + n^2(n^2+2n)/4 > n^2$.

$\therefore \forall n \in N^*$，$S(n) > n^2$.

性质 5　$S(m+n) \neq S(m) + S(n)$且 $S(m \cdot n) \neq S(m) \cdot S(n)$.

证明　$\because S(2) = 12$，$S(3) = 45$，$S(5) = 250$，$S(6) = 468$

$\therefore S(2) + S(3) = 12 + 45 = 57$，$S(2+3) = S(5) = 250$

$\therefore S(2+3) \neq S(2) + S(3)$.

$\because S(2) \cdot S(3) = 12 \times 15 = 540$，$S(2 \cdot 3) = S(6) = 468$

$\therefore S(2 \cdot 3) \neq S(2) \cdot S(3)$.

性质 6　$S(2n+1) - S(2n) = (2n+1)^3 + (2n+1)^2 - 3n^2$.

证明　$\because S(2n+1) = (2n+1)^2(n+1)^2 + (2n+1)^2$，

$S(2n) = n^2(2n+1)^2 + 3n^2$，

$\therefore S(2n+1) - S(2n) = (2n+1)^3 + (2n+1)^2 - 3n^2$.

性质 7　$S(2n) - S(2m) = [n(2n+1) + m(2m+1)][n(2n+1) - m(2m+1)] + 3(n+m)(n-m)$

证明　$\because S(2n) = n^2(2n+1)^2 + 3n^2$，

$\therefore S(2n) - S(2m) = n^2(2n+1)^2 - m^2(2m+1)^2 + 3(n^2 - m^2)$，

$\therefore S(2n) - S(2m) = [n(2n+1) + m(2m+1)][n(2n+1) - m(2m+1)] + 3(n+m)(n-m)$.

2　关于函数 S(n)的方程

性质 8　方程 $S(n) = n^2$没有解.

证明　∵ $S(n)=n^2(n^2+2n+5)/4$或$n^2(n^2+2n+4)/4$

∴ $S(n)=n^2$即$n^2(n^2+2n+5)/4=n^2$或$n^2(n^2+2n+4)/4=n^2$,

∴ $n=0, -1$或$n=0, -2$

又 ∵ n是正整数,

∴ 方程$S(n)=n^2$没有解.

3　关于函数项级数的敛散性

性质9　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S(2n)}$是收敛的.

证明　∵ $S(2n)=n^2(2n+1)^2+3n^2$,

$$\therefore \frac{1}{S(2n)}=\frac{1}{n^2(2n+1)^2+3n^2}=\frac{1}{n^2(4n^2+4n+4)}<\frac{1}{n^2}.$$

由比较判别法知:级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S(2n)}$是收敛的.

性质10　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S(2n-1)}$是收敛的.

证明　$$\because \frac{1}{S(2n-1)}=\frac{1}{n^2(2n-1)^2+(2n-1)^2}=\frac{1}{(2n-1)^2(n^2+1)}<\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}.$$

由比较判别法知:级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S(2n-1)}$是收敛的.

性质11　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S(n)}$是收敛的.

证明　∵ $S(n)\geqslant n^2(n^2+2n+4)/4$

$$\therefore \frac{1}{S(n)}\leqslant\frac{4}{n^2(n^2+2n+4)}<\frac{1}{n^2}.$$

由比较判别法知:级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S(n)}$是收敛的.

性质12　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n^2}$是发散的.

证明　$$\because \frac{S(n)}{n^2}\geqslant\frac{n^2+2n+4}{4}\geqslant\frac{(n+1)^2+4}{4}>\frac{(n+1)^2}{4}>\frac{n^2}{4}$$

∴ 由比较判别法知:级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n^2}$是发散的.

4　关于函数$S(n)$的有关极限结论

性质13　$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(2n)}{\sum_{n=1}^{n}4n^3}=4$$

证明　∵ $S(2n)=n^2(2n+1)^2+3n^2$, $\sum_{n=1}^{n}4n^3=4\sum_{n=1}^{n}n^3=n^2(n+1)^2$,

$$\therefore \frac{S(2n)}{\sum_{n=1}^{n}4n^3}=\frac{n^2(2n+1)^2+3n^2}{n^2(n+1)^2}=4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S(2n)}{\sum_{n=1}^{n}4n^3}=4$$

性质14　$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(2n-1)}{\sum_{n=1}^{n}4n^3}=4$$

证明　∵ $S(2n-1)=n^2(2n-1)^2+(2n-1)^2$; $\sum_{n=1}^{n}4n^3=4\sum_{n=1}^{n}n^3=n^2(n+1)^2$,

$$\therefore \frac{S(2^n-1)}{\sum_{n=1}^{n} 4n^3} = \frac{n^2(2^n-1)^2+(2^n-1)^2}{n^2(n+1)^2} = 4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S(2^n-1)}{\sum_{n=1}^{n} 4n^3} = 4$$

参考文献

[1] Ashbacher C. Introduction to Smarandache Functions[J]. Journal of Recreational Mathematics, 1996 (2): 247.

[2] David Gorski. The Pseudo Smarandache functions[J]. Smarandache Notion Journal, Vol. 12, 2000 (12): 140.

[3] Castrillo Jose. Smarandache continued Fractions[J]. Smarandache Notion Journal, Vol. 9, 1998 (9): 40.

[4] A. W. Vyawahare. Near Pseado Smaranche Functions[J]. Smarandache Notion Journal, Vol. 2004 (1): 42.

[5] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论 (第 3版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[6] 陈传璋. 数学分析 (第 2版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[责任编辑　舒尚奇]

Near Pseudo Modification of Smarandache Function

XUE She-jiao, YAN Chun-liang

(Department of Mathematics, Weinan Teachers College, Weinan 714000, China)

Abstract: Near Pseudo Smarandache Function are defined by A. W. Vyawahare. This new paper defined a new function where, which is a slight modification of by increasing concerned exponent. Hence this function is betterment of "Near Pseudo Smarandache Function (NPSF)". Some properties of are presented here, separately, according to as n is even or odd.

Key words: smarandache function; pseudo smarandache function; equation; convergence; limits

(上接第 14页)

$$q_m = \begin{bmatrix} \alpha_k^1\gamma_l^2-\beta_k^1\zeta_l^2 & -\alpha_k^1\zeta_l^2-\beta_k^1\gamma_l^2 \\ \alpha_k^1\zeta_l^2+\beta_k^1\gamma_l^2 & \alpha_k^1\gamma_l^2-\beta_k^1\zeta_l^2 \end{bmatrix} \qquad q_m = \begin{bmatrix} \gamma_k^1\alpha_l^2-\zeta_k^1\beta_l^2 & -\gamma_k^1\beta_l^2-\zeta_k^1\alpha_l^2 \\ \gamma_k^1\beta_l^2+\zeta_k^1\alpha_l^2 & \gamma_k^1\alpha_l^2-\zeta_k^1\beta_l^2 \end{bmatrix}$$

$$q_m = \begin{bmatrix} \gamma_k^1\gamma_l^2-\zeta_k^1\zeta_l^2 & -\gamma_k^1\zeta_l^2-\zeta_k^1\gamma_l^2 \\ \gamma_k^1\zeta_l^2+\zeta_k^1\gamma_l^2 & \gamma_k^1\gamma_l^2-\zeta_k^1\zeta_l^2 \end{bmatrix} \qquad m=0,1,2,\cdots,s;\ l=0,1,2,\cdots,t$$

证明　由定理 1和前面的论述可证定理 2

参考文献:

[1] 冯象初, 甘小冰, 宋国乡. 数值泛函与小波分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003.

[2] Michael Unser, Thierry Blu. Wavelet Theory Demystified[M]. IEEE transactions on signal proceeding, 2003.

[责任编辑　舒尚奇]

Structure of Double Symmetric Scale Functions

LIU Yu-lin, ZHANG Tong-qi

(Department of Mathematics, Weinan Teachers College, Weinan 714000, China)

Abstract: A kind of double symmetric multi-scale functions and multiwavelets are constructed by using convolution based on complex scale functions and double symmetric scale functions and the formula of structure of double symmetric multi-scale functions, multiwavelets is got.

Key words: convolution; complex scale functions; double symmetric multi-scale functions and multiwavelets