第20卷 第8期 长春大学学报 Vol. 20 No. 8
2010年8月 JOURNAL OF CHANGCHUN UNIVERSITY Aug. 2010

推广伪 Smarandache 函数的初等性质

郭守朋
(西安电子科技大学 理学院，陕西 西安 710071)

摘 要: 用初等方法进一步研究了推广的伪 Smarandache 函数的初等性质，得到了几个复杂的函数值形式，为进一步研究推广 Smarandache 函数其他性质打下了基础。

关键词: Smarandache 函数; 伪 Smarandache 函娄; 素数; 同余式

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1009-3907(2010)08-0004-02

0 引言

David Gorski 在文献[1]中提出了著名的伪 Smarandache 的函数，对任意正整数 n，伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为:

$$Z(n)=\min\{m: m\in N^*, n\mid m(m+1)/2\}。\tag{1}$$

文献[2]推广了伪 Smarandache 函数，对任意的正整数 n，推广伪 Smarandache 函数 $Z_3(n)$ 定义为

$$Z_3(n)=\min\{m: m\in N^*, n\mid m(m+1)(m+2)/6\}。\tag{2}$$

本文进一步研究了 $Z_3(n)$ 的初等性质，分别对 $n=2^lp, n=2^lp^k, n=2^l\times 3^k, l,k\in N^*, p>3$ 为素数，给出了 $Z_3(n)$ 的函数值形式。对于函数方程正整数解[3-4]，均值及渐进公式[5]的研究也是有意义的。

1 $Z_3(n)$ 的进一步研究

引理 1 对任意正整数 k，素数 p，若 $Z_3(kp)=m$，则 m 必为 $lp-2, lp-1, lp, l\in N^*$ 三种情形。

证明 因为 $Z_3(n)\geq 1$，当 $p=2,3$ 时，引理显然成立。当 $p>3$ 是素数，由 $p\mid m(m+1)(m+2)/6$，则 p 必整除 $m, m+1, m+2$，其中之一，因此 m 必有 $lp-2, lp-1, lp, l\in N^*$ 三种情形。证毕。

(1) 当 $n=2^lp, l\in N^*, p>3$ 为素数，设 $Z_3(2^lp)=m$，考虑 $m=gp-2, m=gp-1, m=gp$ 三种情况及 g 的取值有:

(a) 若 $g=1, m=p-2$，此时仅有 $m+1=p-1$ 为偶数，由 $2^lp\mid(p-2)(p-1)p/6$，则有 $2^{l+1}\mid p-1$，用同余式表述即为，当 $p-1\equiv 0\bmod(2^{l+1})$ 时，$Z_3(2^lp)=p-2$; 若 $m=p-1$，由 $2^lp\mid(p-1)p(p+1)/6$，则有 $2^l\mid p-1$ 或者 $2^l\mid p+1$，即当 $p\pm 1\equiv 0\bmod(2^l)$，但 $p-1\neq 0\bmod(2^{l+1})$ 时，$Z_3(2^lp)=p-1$; 若 $m=p$，由 $2^lp\mid p(p+1)(p+2)/6$，则有 $p+1\equiv 0\bmod^{l+1}$(此时 $p+1\equiv 0\bmod(2^l)$，应有 $Z_3(2^lp)=p-1$。

(b) 同理，若 $g=2, m=2p-2$ 时，由 $2^lp\mid(2p-2)(2p-1)2p/6$，则 $2^{l-1}\mid p-1$，即当 $p-1\equiv 0\bmod(2$，且 $p-1\neq 0\bmod(2^l)$ 时，$Z_3(2^lp)=2p-2$; $m\neq 2p-1$，这是因为若 $m=2p-1$，则 $2^lp\mid(2p-1)2p(2p+1)/6$，这是不可能的; 若 $m=2p$，由 $2^lp\mid 2p(2p+1)(2p+2)/6$，则 $2^{l-1}\mid p+1$，即 $p+1\equiv 0\bmod(2^{l-1})$，且 $p+1\neq 0\bmod(2^l)$。

(c) 若 $g=2^k, k>1, k\in N$，由 $2^lp\mid(2^kp-2)(2^kp-1)2^kp/6$，则 $2^l/2^k$，由 $Z_3(n)$ 的最小性，取 $2^k=2^l$，此时，$Z_3(2^lp)=2^lp-2$。

(d) 若 $g>3$ 为奇数，$m=gp-2$，由 $2^lp\mid(gp-2)(gp-1)gp/6$，有 $2^{l+1}\mid gp-1$; 若 $m=gp-1$，由 $2^lp\mid(gp-1)gp(gp+1)/6$，则 $2^{l-1}\mid gp-1$ 或者 $2^l\mid gp+1$; 若 $m=gp$，由 $2^lp\mid gp(gp+1)(gp+2)/6$，则 $2^{l+1}\mid gp+1$，亦有 $2^l\mid gp+1$，此时应有 $m=gp-1$。同理，若 $g>3$ 为奇数，$m=2gp-2$，此时有 $2^{l-1}\mid gp-1$; 若 $m=2gp, g>3$ 为奇数，此时有 $2^{l-1}\mid gp+1$。至此 m 已没有其它可能的情形。综上，有

收稿日期: 2010-05-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目[10671155]

作者简介: 郭守朋(1986-)，男，安徽亳州人，硕士，主要从事数论、变分不等式及优化方面研究。

$$Z_3(2^l p) = \begin{cases} p-2, p-1\equiv 0 \bmod (2^{l+1}) \\ p-1, p\pm 1\equiv 0 \bmod (2^{l}) \\ 2p-2, p-1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2p, p+1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ gp-2, gp-1\equiv 0 \bmod (2^{l+1}) \\ gp-1, gp\pm 1\equiv 0 \bmod (2^{l}) \\ 2sp-2, sp-1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2sp, sp+1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2^l p-2, \text{其它} \end{cases}, 3\le g\le 2^l-1, 3\le s\le 2^{l-1}-1 \text{ 为奇数} \quad (1)$$

(2) 同理,当 $n=2^l p^k, l\in N^*, k\in N^*, p>3$ 为素数时,有

$$Z_3(2^l p^k) = \begin{cases} p^k-2, p^k-1\equiv 0 \bmod (2^{l+1}) \\ p^k-1, p^k\pm 1\equiv 0 \bmod (2^{l}) \\ 2p^k-2, p^k-1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2p^k, p^k+1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ gp^k-2, gp^k-1\equiv 0 \bmod (2^{l+1}) \\ gp^k-1, gp^k\pm 1\equiv 0 \bmod (2^{l}) \\ 2sp^k-2, sp^k-1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2sp^k, sp^k+1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2^l p^k-2, \text{其它} \end{cases}, 3\le g\le 2^l-1, 3\le s\le 2^{l-1}-1 \text{ 为奇数} \quad (2)$$

当 $n=2^l\times 3^k, l, k\in N^*$ 时,考虑到(2)式及文献[2]中性质 2(文献[2]中[4]式)有

$$Z_3(2^l\times 3^k) = \begin{cases} 3^{k+1}-2, 3^{k+1}-1\equiv 0 \bmod (2^{l+1}) \\ 3^{k+1}-1, 3^{k+1}\pm \equiv 0 \bmod (2^{l}) \\ 2\times 3^{k+1}-2, 3^{k+1}-1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2\times 3^{k+1}, 3^{k+1}+1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ g\cdot 3^{k+1}-2, g\cdot 3^{k+1}-1\equiv 0 \bmod (2^{l+1}) \\ g\cdot 3^{k+1}-1, g\cdot 3^{k+1}\pm 1\equiv 0 \bmod (2^{l}) \\ 2s\cdot 3^{k+1}, s\cdot 3^{k+1}-1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2s\cdot 3^{k+1}, s\cdot 3^{k+1}+1\equiv 0 \bmod (2^{l-1}) \\ 2^l\times 3^{k+1}-2, \text{其它} \end{cases}, 3\le g\le 2^l-1, 3\le s\le 2^{l-1}-1 \text{ 为奇数} \quad (3)$$

2 结　语

本文在文献[2]的基础上,进一步研究推广伪 Smarandache 函数 $Z_3(n)$ 的初等性质,给出了几个复杂的函数值形式。

参考文献:

[1] Gorskid D. The pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140 - 149.

[2] 郭守明. 推广伪 Smarandache 函数 [J]. 贵州大学学报: 自然科学版, 2010, 27(1): 6 - 7.

[3] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2008, 38(2): 173 - 176.

[4] 薛西峰. 一类包含 Smarandache 对偶函数方程的求解 [J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 35(4): 9 - 11.

[5] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报: 中文版, 2006, 49(5): 1009 - 1012.

责任编辑: 钟　声

(下转第 26 页)

Dynamic constraint combination homotopy method for minimal weak efficient solutions to multi-objective programming

HE Fei, SHANG Yu-feng

(Fundamental Department of Flight Training Base, Air Force Aviation University, Changchun 130022, China)

Abstract: This article gives the dynamic constraint combination homotopy method for minimal weak efficient solutions to convex multi-objective programming problems on unbounded sets and proves the existence and convergence of the homotopy path.

Keywords: multi-objective programming; convex programming; homotopy algorithm; weak efficient solution; efficient solution

---

(上接第 5 页)

Elemetary properties on the generalization of the pseudo Smarandache function

GUO Shou-peng

(College of Science, Xidian University, Xi′an 710071, China)

Abstract: Elementary properties on the generalization of the pseudo Smarandache function are further studied by using elementary methods and several complex forms of function value are obtained, which provides a good foundation for the further study on other properties of the generalization of the pseudo Smarandache function.

Keywords: Smarandache function; pseudo Smarandache function; prime; congruence