第 32 卷 第 3 期
2012 年 7 月
天津师范大学学报(自然科学版)
Journal of Tianjin Normal University (Natural Science Edition)
Vol. 32 No. 3
Jul. 2012

文章编号:1671-1114(2012)03-0006-03

包含 Smarandache 对偶函数的方程的正整数解

陈 斌
(渭南师范学院 数学系,陕西 渭南 714000)

摘 要:利用初等数论及组合方法研究了一个包含 Smarandache 对偶函数及素因子函数方程 $\sum_{d|n}\frac{1}{S_*(d)}=2\Omega(n)$ 的可解性.给出了这个方程所有正整数解的具体形式,即证明了该方程所有偶数解为 $n=2^4\cdot 3^{30}$、$n=2^6\cdot 3^{12}$、$n=8p^7$、$n=16p^5$、$n=64p^4$、$n=2pq$,其中 p、$q\geqslant 5$ 为奇素数;所有奇数解为 $n=p$、$n=p^\alpha q$,其中 $\alpha\geqslant 1$,p、q 为奇素数.

关键词:Smarandache 对偶函数;Ω 函数;正整数解
中图分类号:O156.4 **文献标志码**:A

Positive integer solutions of an equation involving Smarandache dual function

CHEN Bin
(Department of Mathematics, Weinan Teachers University, Weinan 714000, Shaanxi Province, China)

Abstract: By using the elementary number theory and combinational methods, the positive integer solutions of a function equation involving both of the Smarandache dual function and the Ω function is studied. All the exact positive integer solutions are given for the equation, and it is proved that the even n satisfy the equation only if $n=2^4\cdot 3^{30}$, $n=2^6\cdot 3^{12}$, $n=8p^7$, $n=16p^5$, $n=64p^4$, $n=2pq$, where p, $q\geqslant 5$ are both odd primes, and the odd n satisfy the equation only if $n=p$, $n=p^\alpha q$, where p, q are both odd primes, $\alpha\geqslant 1$.

Key words: Smarandache dual function; Ω function; positive integer solutions

1 引言及结论

对于任意正整数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 $n|m!$.即 $S(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n|m!\}$,它是数论专家 F. Smarandache 教授在其所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的,并建议人们研究它的性质.由 $S(n)$ 的定义容易推得,如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为正整数 n 的标准分解式,那么 $S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}), S(p_2^{\alpha_2}), \cdots, S(p_k^{\alpha_k})\}$.而关于 $S(n)$ 的算术性质,已有不少有趣的结果[1-6].文献[7]引入了 Smarandache 函数 $S(n)$ 的对偶函数 $S_*(n)$ 如下:对于任意正整数 n,$S_*(n)$ 定义为最大的正整数 m,使得 $m!|n$.即 $S_*(n)=\max\{m: m\in\mathbf{N}, m!|n\}$.关于 $S_*(n)$ 的算术性质也有一系列研究成果[8-13].如王妤研究了 $S_*(n)$ 的函数方程 $\sum_{d|n}SL^*(d)=\sum_{d|n}S_*(d)$ 的可解性[14],并得到了一个有趣的结论:设 $A=\left\{n: \sum_{d|n}SL^*(d)=\sum_{d|n}S_*(d), n\in\mathbf{N}\right\}$,则对于任意的实数 s,Drichlet 级数 $f(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}\frac{1}{n^s}$ 当 $s\leqslant 1$ 时发散;当 $s>1$ 时收敛,且有恒等式 $f(s)=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{12^s}\right)$,其中:$SL^*(n)$ 为 Smarandache LCM 函数的对

收稿日期:2012-12-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省科技厅自然科学基金资助项目(2012JM1021);陕西省教育厅自然科学科研计划资助项目(12JK0880);陕西省军民融合研究院 2011 年基金资助项目(11JMR10);渭南师范学院科研基金资助项目(12YKS024);信息安全国家重点实验室(中国科学院软件研究所)资助项目 100190(2011NO:01-01-2)
第一作者:陈 斌(1979—),男,讲师,主要从事数论方面的研究.

偶函数，$\zeta(s)$表示 Riemann Zeta-函数.

现设 $\Omega(n)$表示正整数 n 的所有素因子的个数(按重数计算)，即若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为正整数 n 的标准分解式，则 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$. 考虑函数方程

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S_*(d)}=2\Omega(n) \tag{1}$$

张文鹏教授建议笔者研究方程(1)的可解性，本研究得到了这个方程的所有正整数解. 即证明了如下定理：

定理　方程(1)所有偶数解为 $n=2^4\cdot 3^{30}$、$n=2^6\cdot 3^{12}$、$n=8p^7$、$n=16p^5$、$n=64p^4$、$n=2pq$，其中 p、$q\geqslant 5$ 为奇素数；所有奇数解为 $n=p$、$n=p^{\alpha}q$，其中 $\alpha\geqslant 1$，p、q 为奇素数.

2　定理的证明

显然，由 $S_*(n)$和 $\Omega(n)$的定义知，$n=1$ 不是方程(1)的解，下面假设 $n>1$.

Ⅰ. 若 n 为偶数，分以下几种情况讨论：

① 若 $n=2^{\alpha}$，$\alpha\geqslant 1$ 满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2\alpha$，$\sum\limits_{d\mid 2^{\alpha}}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}=1+\frac{\alpha}{2}$，则有 $1+\frac{\alpha}{2}=2\alpha$，即 $\alpha=\frac{2}{3}$，矛盾. 故 $n=2^{\alpha}$，$\alpha\geqslant 1$ 不是方程(1)的解.

② 若 $n=2\cdot 3^{\alpha}$，$\alpha\geqslant 1$ 满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2(\alpha+1)$，

$$\sum_{d\mid 2\cdot 3^{\alpha}}\frac{1}{S_*(d)}=1+\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2\cdot 3^i)}=\frac{3}{2}+\alpha+\frac{\alpha}{3}=\frac{3}{2}+\frac{4\alpha}{3}$$

则 $\frac{3}{2}+\frac{4\alpha}{3}=2(\alpha+1)$，即 $\alpha=-\frac{3}{4}$，矛盾. 故 $n=2\cdot 3^{\alpha}$，$\alpha\geqslant 1$ 不是方程(1)的解.

③ 若 $n=2^{\alpha}3^{\beta}$，$\alpha\geqslant 2$，$\beta\geqslant 1$ 满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d\mid 2^{\alpha}3^{\beta}}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2\cdot 3^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^2 3^i)}+\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i 3^j)}=$$
$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}=1+\frac{\alpha}{2}+\frac{5\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}$$

则有 $1+\frac{\alpha}{2}+\frac{5\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}=2(\alpha+\beta)$，即 $18\alpha+10\beta=12+3\alpha\beta$ 或 $\beta=6+\frac{48}{3\alpha-10}$，这个不定方程有 2 组解 $\alpha_1=4$，$\beta_1=30$ 和 $\alpha_2=6$，$\beta_2=12$，此时方程(1)有解当且仅当 $n=2^4\cdot 3^{30}$ 或 $n=2^6\cdot 3^{12}$.

④ 若 $n=2^{\alpha}3^{\beta}p^{\gamma}(\alpha\geqslant 1,\ \beta\geqslant 1,\ \gamma\geqslant 1)$，$p\geqslant 5$ 为奇素数满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2(\alpha+\beta+\gamma)$，

$$\sum_{d\mid 2^{\alpha}3^{\beta}p^{\gamma}}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p^i)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i 3^j)}+\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^i 3^j)}+$$
$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i p^j)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(3^i p^j)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i 3^j p^k)}+$$
$$\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^3 3^j p^k)}+\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^4\cdot 3p^k)}+\sum_{i=4}^{\alpha}\sum_{j=2}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^i 3^j p^k)}=$$
$$\begin{cases}1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{5}+\frac{\gamma}{5}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{6} & p=5\\ 1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{4}+\frac{\gamma}{4}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{4} & p>5\end{cases}$$

则有

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{5}+\frac{\gamma}{5}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{6}=2(\alpha+\beta+\gamma)$$

或

$$1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{2\beta}{3}+\frac{(\alpha-2)\beta}{4}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{2\gamma}{3}+\frac{2\beta\gamma}{3}+\frac{\beta\gamma}{4}+\frac{\gamma}{4}+\frac{(\alpha-3)(\beta-1)\gamma}{4}=2(\alpha+\beta+\gamma)$$

化简得

$$[6\alpha+24\beta+2(\alpha-3)(\beta-1)]\gamma=18\alpha+10\beta-3\alpha\beta-12$$

或

$$[6\alpha+23\beta+3(\alpha-3)(\beta-1)]\gamma=18\alpha+10\beta-3\alpha\beta-12$$

当 $\alpha\geqslant1$，$\beta\geqslant1$，$\gamma\geqslant1$ 时，这 2 个不定方程均无正整数解．故正整数 $n=2^\alpha3^\beta p^\gamma(\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1,\gamma\geqslant1)$，$p\geqslant5$ 为奇素数不是方程(1)的解．

同理可证 $n=2^\alpha3^\beta p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$\alpha\geqslant1$；$\beta\geqslant1$；$\alpha_i\geqslant1$，$i=4,5,\cdots,k$，$k\geqslant4$；$p_i\geqslant5$ 为奇素数也不是方程(1)的解．

⑤ 若 $n=2^\alpha p^\beta(\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1)$，$p\geqslant5$ 为奇素数满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d\mid2^\alpha\cdot p^\beta}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^ip^j)}=1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\alpha\beta}{2}$$

即得 $1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\alpha\beta}{2}=2(\alpha+\beta)$，化简得 $\beta=3+\frac{4}{\alpha-2}$，这个不定方程有 3 组解：$\alpha_1=3$，$\beta_1=7$；$\alpha_2=4$，$\beta_2=5$；$\alpha_3=6$，$\beta_3=4$．故此时方程(1)有解当且仅当 $n=2^3p^7$、$n=2^4p^5$、$n=2^6p^4$，其中 $p\geqslant5$ 为奇素数．

⑥ 若 $n=2^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma(\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1,\gamma\geqslant1)$，$p_i\geqslant5$ 为奇素数满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2(\alpha+\beta+\gamma)$，

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid2^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma}\frac{1}{S_*(d)}=&1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p_2^i)}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p_3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(2^ip_2^j)}+\\&\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^ip_3^j)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p_2^ip_3^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(2^ip_2^jp_3^k)}=\\&1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\end{aligned}$$

故可得 $1+\frac{\alpha}{2}+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha\gamma}{2}+\beta\gamma+\frac{\alpha\beta\gamma}{2}=2(\alpha+\beta+\gamma)$，化简得 $(\alpha+2\beta+\alpha\beta-2)\gamma=3\alpha+2\beta-\alpha\beta-2$，这个不定方程的正整数解为 $\alpha=\beta=\gamma=1$．故此时方程(1)有解当且仅当 $n=2p_2p_3$，$p_i\geqslant5$ 为奇素数，$i=2$、3．

又容易计算得当 $n=2\cdot5\cdot7\cdot11$ 时，$\sum\limits_{d\mid2\cdot5\cdot7\cdot11}\frac{1}{S_*(d)}=12$，而 $2\Omega(n)=8$，所以此时方程(1)无解．

同理可得 $n=2^\alpha p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$\alpha\geqslant1$；$\alpha_i\geqslant1$，$i=2,3,\cdots,k$，$k\geqslant4$；$p_i\geqslant5$ 为奇素数也不是方程(1)的解．

Ⅱ．若 n 为奇数，分以下几种情况讨论：

⑦ 若 $n=p^\alpha(\alpha\geqslant1)$，$p$ 为奇素数满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2\alpha$，$\sum\limits_{d\mid p^\alpha}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(p^i)}=1+\alpha$，则有 $1+\alpha=2\alpha$，即 $\alpha=1$．故此时方程(1)有解当且仅当 $n=p$，p 为奇素数．

⑧ 若 $n=p^\alpha q^\beta(\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1)$，$p$、$q$ 为奇素数满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2(\alpha+\beta)$，

$$\sum_{d\mid p^\alpha q^\beta}\frac{1}{S_*(d)}=1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(p^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(q^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p^iq^j)}=1+\alpha+\beta+\alpha\beta$$

故可得 $1+\alpha+\beta+\alpha\beta=2(\alpha+\beta)$，即 $1+\alpha\beta=\alpha+\beta$，这个不定方程的解为 $\alpha=1$，$\beta\in\mathbf{N}$ 或 $\alpha\in\mathbf{N}$，$\beta=1$．故此时方程(1)有解当且仅当 $n=pq^\beta$ 或 $n=p^\alpha q(\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1)$，$p$、$q$ 为奇素数．

⑨ 若 $n=p^\alpha q^\beta h^\gamma(\alpha\geqslant1,\beta\geqslant1,\gamma\geqslant1)$，$p$、$q$、$h$ 为奇素数满足方程(1)，易得 $2\Omega(n)=2(\alpha+\beta+\gamma)$，

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid p^\alpha q^\beta h^\gamma}\frac{1}{S_*(d)}=&1+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{S_*(p^i)}+\sum_{i=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(q^i)}+\sum_{i=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(h^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{1}{S_*(p^iq^j)}+\\&\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p^ih^j)}+\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(q^ih^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{\gamma}\frac{1}{S_*(p^iq^jh^k)}=\\&1+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

故可得 $1+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)$，即 $(\alpha+\beta+\alpha\beta-1)\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta-1$，当 $\alpha\geqslant1$，$\beta\geqslant1$，$\gamma\geqslant1$时，这个不定方程没有正整数解．故此时方程(1)无解．

同理可得 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$\alpha_i\geqslant1$，$i=1,2,\cdots,k$，$k\geqslant4$；$p_i$为奇素数不是方程(1)的解．

综合上述Ⅰ和Ⅱ的讨论情况，定理证毕．

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicageo: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 潘承洞，潘承彪．初等数论[M]．北京：北京大学出版社，1992．

（下转第 17 页）

$E(G)$. 令 $a_2=i$，其中 $i\in[2,3]$，$a_3=j\in[m-1,m]$，那么共有 $n-1$ 种颜色染 H 的顶点子集$[2,m+1]\setminus[i,j]$中的 $m-2$ 个点，使得每一种颜色恰染满足条件 $v_5-v_0\leqslant 7$ 的 6 个点$(2\leqslant)v_0<v_1$、v_1+1、v_1+2、$v_1+3<v_5(\leqslant m+1)$. 由引理 6 知，点 $m+6$ 必染 α 色，但它与 a_3、a_2、a_4 导出一个 4-圈，矛盾.

2.2) 若 $a_4\in\{a_6-i\mid i\in[1,3]\}$，假设 $a_3a_4\in E(H)$，那么 $a_4\geqslant m+1$ 且 $4\leqslant a_3\leqslant a_4-4$. 显然，$a_2a_4$、$a_3a_5\in E(G)$，故 a_2a_3、$a_2a_5\notin E(G)$，那么 $a_2=2$ 且 $4\leqslant a_3\leqslant 5$. 令 $a_3=i$，其中 $i\in[4,5]$，并令 $a_4=j$，其中 $j\in[m+1,m+2]$. 共有 $n-1$ 种颜色染 H 中 $m-2$ 个点$[3,m+2]\setminus\{i,j\}$，使得每一种颜色恰染满足条件 $v_5-v_0\leqslant 7$ 的 6 个点$(3\leqslant)v_0<v_1$、v_1+1、v_1+2、$v_1+3<v_5(\leqslant m+2)$. 从而点 $m+7$ 必染 α 色，但它与 a_4、a_3、a_5 导出一个圈，矛盾.

综上可得，$a_3=m+1$，那么 $a_4=m+2$. 从而断言成立.

若 $4\leqslant a_2\leqslant m-3$，则顶点 a_1、a_2、a_3 导出一个 3-圈，矛盾. 从而有 $a_2\leqslant 4$ 或者 $a_2\geqslant m-2$. 若 $a_2\leqslant 4$，则 a_2a_3、$a_2a_4\in E(H)$. 共有 $n-1$ 种颜色染 H 中 $m-2$ 个点$[2,m]\setminus\{a_2\}$，由引理 4～6 知，每一种颜色恰染满足条件 $v_5-v_0\leqslant 7$ 的 6 个点$(2\leqslant)v_0<v_1$、v_1+1、v_1+2、$v_1+3<v_5(\leqslant m)$，由引理 6 知，顶点 $m+6$ 必染 α 色，但它与 a_4、a_2、a_3 导出一个圈，矛盾. 若 $a_2\geqslant m-2$，则 a_1a_2、$a_1a_3\in E(H)$. 同样只有 $n-1$ 种颜色染 H 中 $m-2$ 个点$[2,m]\setminus\{a_2\}$，由引理 4～6 知，每一种颜色恰染满足条件 $v_5-v_0\leqslant 7$ 的 6 个点$(2\leqslant)v_0<v_1$、v_1+1、v_1+2、$v_1+3<v_5(\leqslant m)$. 那么顶点 $m+5$ 必染 α 色，但它与 a_3、a_1、a_2 导出一个 4-圈，亦推出矛盾.

综上所述，对于 $m=6q+2\geqslant 8$，有 $va(G(D_m))\geqslant\left\lceil\frac{m+5}{6}\right\rceil$.

若 $m\neq 6q+2$ 且 $m>8$，则 m 可以表示成 $m=6q+i$，其中 $3\leqslant i\leqslant 7$. 因为

$$D_{6q+7}\supseteq D_{6q+6}\supseteq D_{6q+5}\supseteq D_{6q+4}\supseteq D_{6q+3}\supseteq D_{6q+2}$$

所以有

$$va(G(D_{6q+7}))\geqslant\cdots\geqslant va(G(D_{6q+2}))\geqslant\left\lceil\frac{6q+2+5}{6}\right\rceil=\left\lceil\frac{6q+7+5}{6}\right\rceil$$

从而，对于任意正整数 $m>8$，有 $va(G(D_m))\geqslant\left\lceil\frac{m+5}{6}\right\rceil$.

参考文献：

[1] CATLIN P A, LAI H J. Vertex arboricity and maximum degree[J]. Discrete Mathematics, 1995, 141: 37-46.
[2] ŠKREKOVSKI R. On the critical point-arboricity graphs[J]. J Graph Theory, 2002, 39: 50-61.
[3] EGGLETON R B, ERDÖS P, SKILTON D K. Colouring the real line[J]. J Combin Theory: Ser B, 1985, 39: 86-100.
[4] CHANG G J, LIU D F, ZHU X D. Distance graphs and T-coloring[J]. J Combin Theory: Ser B, 1999, 75: 259-269.
[5] YU Q L, ZUO L C. The fractional vertex arboricity of graphs[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007(1): 245-252.
[6] ZUO L C, YU Q, WU J L. Vertex aboricity of integer distance graph $G(D_{m,k})$[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 1649-1657.

（责任编校　马新光）

（上接第 8 页）

[3] 易媛，亢小玉. Smarandache 函数问题研究[M]. 西安：西北大学出版社，2006.
[4] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，38(2)：173-176.
[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报，2006，49(5)：1009-1012.
[6] 李梵蓓. 一个与 Smarandache 函数有关的函数方程及其正整数解[J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，38(6)：892-893.
[7] SANDOR J. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5(2): 41-51.
[8] SANDOR J. On a dual of the pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 18-23.
[9] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.
[10] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.
[11] LOU Y B. On the pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.
[12] ZHENG Y N. On the pseudo Smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 51-53.
[13] 张爱玲. 关于伪 Smarandache 函数的一个方程及其正整数解[J]. 西北大学学报：自然科学版，2008，38(4)：535-536.
[14] 王妤. 一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2008，25(5)：23-27.

（责任编校　马新光）