DOI:10.15886/j.cnki.hdxbzkb.2012.01.015

文章编号:1004－1729(2012)01－0007－02

包含 Smarandache LCM 函数的方程的解

王明军

(渭南师范学院 数学与信息科学学院,陕西 渭南 714000)

摘 要: 用分类讨论和初等方法完全解决了方程 $SL(n)=a_m(n)$ 和 $SL(n)=\varphi(n^2)$ 的可解性,其中 $a_m(n)$ 为 n 的 m 次幂剩余数,$\varphi(n)$ 为欧拉函数,丰富了数论函数 $SL(n)$ 的性质和数论函数方程的研究.

关键词: Smarandache LCM 函数; m 次幂剩余数; Euler 函数; 解

中图分类号: O 156.4 文献标志码: A

1 引言及结论

在文献[1]中,MURTHY A 定义了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$:对任意正整数 n,函数 $SL(n)$ 表示满足 $n\mid[1,2,\cdots,k]$ 的最小正整数 k,$[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数,同时证明了如果 n 是一个素数,那么 $SL(n)=S(n)$,其中 $S(n)$ 是 Smarandache 函数. 关于函数 $SL(n)$ 的性质,许多学者都进行过研究,并获得了许多有趣的结论. 文献[2]中,给出满足 $SL(n)=S(n)$,$S(n)\neq n$ 的整数可表示为 $n=12$ 或者 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_r,p$ 是不同的素数且 $p>p_i^{\alpha_i}$,$i=1,2,\cdots,r$. 文献[3]研究了 $SL(n)$ 与 Dirichlet 除数函数的加权均值问题,得到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)SL(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_1x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right).$$

设 n 为任一正整数,称 $a_m(n)$ 为 n 的 m 次幂剩余数,如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,其中 p_i 是素数且 $\alpha_i\geqslant 1$,那么 $a_m(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$,$\beta_i=\min(m-1,\alpha_i)$. 文献[4]讨论了方程 $a_m(n)=\varphi(n)$ 的解.

本文的主要目的是利用分类讨论和初等方法研究包含 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 的 2 个方程 $SL(n)=a_m(n)$ 和 $SL(n)=\varphi(n^2)$ 的可解性,并给出它们的解,得到下面的定理:

定理1 方程 $SL(n)=a_m(n)$ 有且仅有 $n=1$ 和形如 $n=p^\alpha(1\leqslant\alpha<m)$ 的解.

定理2 方程 $SL(n)=\varphi(n^2)$ 的解只有 $n=1$ 和 $n=2$.

2 定理的证明

下面用分类讨论和初等的方法对定理 1 和 2 予以证明:

定理1的证明

1) 当 $n=1$ 时,$SL(1)=a_m(1)=1$,故 $n=1$ 是方程 $SL(n)=a_m(n)$ 的解.

2) 当 $n>1$ 时,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式,其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$.

下面分 2 种情况讨论:

① 若 $k=1$ 时,此时 $n=p^\alpha$.

当 $\alpha\geqslant m$ 时,$SL(n)=p^\alpha$,$a_m(n)=p^{m-1}$,由于 $\alpha>m-1$,所以 $\alpha\geqslant m$ 时,$n=p^\alpha$ 不是原方程的解.

当 $1\leqslant\alpha<m$ 时,$SL(n)=p^\alpha$,$a_m(n)=p^\alpha$,所以 $1\leqslant\alpha<m$ 时,$n=p^\alpha$ 是原方程的解.

收稿日期: 2011－06－20

基金项目: 陕西省教育厅科研基金项目(11JK0478)

作者简介: 王明军(1972－),男,陕西合阳人,渭南师范学院数学与信息科学系讲师,硕士.

② 若 $k > 1$ 时，此时 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

$$SL(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{p_1^{\alpha_i}\}, a_m(n) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \beta_i = \min\{m - 1, \alpha_i\}, i = 1, 2, \cdots, k.$$

由于 $k > 1$ 时，$SL(n)$ 是一个素数的幂，而 $a_m(n)$ 中至少包含了 2 个素数的幂的乘积，此时 $SL(n) \neq a_m(n)$，所以 $k > 1$，$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是原方程的解.

综上所述，方程 $SL(n) = a_m(n)$ 有且仅有 $n = 1$ 和形如 $n = p^{\alpha}(1 \leqslant \alpha < m)$ 的解.

定理 2 的证明

1) 当 $n = 1$ 时，$SL(1) = \varphi(1^2) = 1$，故 $n = 1$ 是方程 $SL(n) = \varphi(n^2)$ 的解.

2) 当 $n = 2^{\alpha}$ 时，$\alpha \geqslant 1$ 时，$SL(n) = 2^{\alpha}$，$\varphi(n^2) = 2^{2\alpha - 1}$，由 $\alpha = 2\alpha - 1$ 得 $\alpha = 1$. 故 $n = 2$ 是方程 $SL(n) = \varphi(n^2)$ 的解.

3) 当 $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，其中 $2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$，$\alpha \geqslant 1$，至少有一个 $\alpha_i \geqslant 1$，$1 \leqslant i \leqslant k$ 时，

$$SL(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{2^{\alpha}, p_i^{\alpha_i}\} = 2^{\alpha} \text{ 或 } p_i^{\alpha_i}, 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$\varphi(n^2) = 2^{2\alpha - 1} p_1^{2\alpha_1 - 1} p_2^{2\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{2\alpha_k - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1),$$

此时，$SL(n)$ 是一个素数的幂，而 $\varphi(n^2)$ 中至少包含了 2 个素数的幂的乘积，故 $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程 $SL(n) = \varphi(n^2)$ 的解.

4) 当 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，其中 $2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$，至少有一个 $\alpha_i \geqslant 1$，$1 \leqslant i \leqslant k$ 时，

$$SL(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{p_i^{\alpha_i}\} = p_l^{\alpha_l}, \varphi(n^2) = p_1^{2\alpha_1 - 1} p_2^{2\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{2\alpha_k - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1),$$

显然，当 $p_1 > 2$ 时，$SL(n)$ 为奇数而 $\varphi(n^2)$ 为偶数，所以此时 $SL(n) = \varphi(n^2)$ 无解.

完成了定理 1 和 2 的证明.

参考文献:

[1] MURTHY A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307 - 309.

[2] LE Mao-hua. An equation concerning the Smarandache LCM function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186 - 188.

[3] 吕国亮. 关于 F. Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 315 - 317.

[4] ZHANG Wen-peng. On the Smarandache m-th power residues: proceeding of Research on Smarandache Problems in Number Theory, Shangluo, March 22 - 24, 2005 [C]. USA: Hexis, 2005: 1 - 3.

[5] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Spring Verlag, 1976.

[6] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.

Solutions of Equation Involving the Smarandache LCM Function

WANG Ming-jun

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan 714000, China)

Abstract: In our report, the elementary methods and classification discussion were used to solve the solvability of equation $SL(n) = a_m(n)$ and $SL(n) = \varphi(n^2)$, in which $a_m(n)$ denoted m-th power residues of n, $\varphi(n)$ denoted the Euler function, and which enriched the properties of $SL(n)$ and the study of functional equation.

Key words: Smarandache LCM function; m-th power residues; Euler function; solutions