文章编号： 1007-9831（2011）03-0001-03

关于新的伪F.Smarandache函数的一个均值

王妤

（西安财经学院 统计学院，陕西 西安 710100）

摘要： 对任意正整数 n，著名的伪Smarandache无平方因子函数 $Z\omega(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n|m^n$，即 $Z\omega(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}^+,\ n|m^n\}$，同时新的伪 Smarandache 函数 $K(n)$ 定义为 $K(n)=m=\dfrac{n(n+1)}{2}+k$，其中：$k$ 是最小的正整数，使得 $n|m$．利用初等及解析方法研究复合函数 $Z\omega\left(K(n)-\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$ 的均值问题，并给出了一个的渐近公式．

关键词： 伪Smarandache函数；均值；渐近公式

中图分类号： O156.4　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.3969/j.issn.1007-9831.2011.03.001

On the mean value of the new pseudo F.Smarandache function

WANG Yu

（School of Statistical，Xi'an University of Finance and Economics，Xi'an 710100，China）

Abstract： For any positive integer n，the famous psedo-Smarandache-squarefree function $Z\omega(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m^n$. That is，$Z\omega(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}^+,\ n|m^n\}$. The new pseudo smarandache function $K(n)=m=\dfrac{n(n+1)}{2}+k$，where k is the smallest natural number such that $n|m$. Studied the mean value properties of $Z\omega\left(K(n)-\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$ by using of the elementary and analytic methods，and gave an asymptotic formula for it.

Key words： pseudo F.Smarandache function；mean value；asymptotic formula

1　引言及预备知识

对任意正整数 n，著名的伪F.Smarandache无平方因子函数 $Z\omega(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n|m^n$，即 $Z\omega(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}^+,\ n|m^n\}$，同时新的伪Smarandache函数 $K(n)$ 定义为 $K(n)=m=\dfrac{n(n+1)}{2}+k$，其中：$k$ 是最小的正整数，使得 $n|m$．美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授在文献[1]中提到这2种函数，并建议人们研究它们的性质．从 $Z\omega(n)$ 的定义可知，对于任意正整数 n，若 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$，那么 $Z(\omega)=p_1p_2\dots p_r$．由此不难计算出 $Z\omega(n)$ 的前几个值为：$Z\omega(1)=1$，$Z\omega(2)=2$，

收稿日期： 2011-03-05
基金项目： 国家自然基金资助项目（10671155）
作者简介： 王妤（1983-），女，陕西宝鸡人，助教，硕士，从事数论研究．E-mail：511wangyu@163.com

$Z\omega(3)=3$，$Z\omega(4)=2$，$Z\omega(5)=5$，$Z\omega(6)=6$，$Z\omega(7)=7$，$Z\omega(8)=2$，$Z\omega(9)=3$，$Z\omega(10)=10$，$Z\omega(11)=11$，$Z\omega(12)=6$，$\cdots$. 关于 $Z\omega(n)$ 的算术性质，许多学者进行了研究，如文献[2]中，证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Z\omega(n))^{a}}(a\in\mathbf{R},\ a>0)$ 是发散. 文献[3]研究了函数 $K(n)$ 的性质，证明了对任意实数 $s>0.5$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^{s}(n)}$ 是收敛的，并得出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K(n)}=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{5}{6}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}(n)}=\frac{11}{108}\pi^{2}-\frac{22+2\ln 2}{27}$.

对于 $Z\omega(n)$ 与 $K(n)$ 的复合函数的研究似乎没有人做过，至少我们没有看到过这方面的论文. 本文利用初等及解析方法研究复合函数 $Z\omega\left(K(n)-\frac{n(n+1)}{2}\right)$ 的均值问题，并给出了一个的渐近公式.

2 主要结果及证明

引理 1[4] 对于任意正整数 n，有 $K(n)=\begin{cases}\frac{n(n+3)}{2} & 当n是奇数\\ \frac{n(n+2)}{2} & 当n是偶数\end{cases}$.

引理 2[5] 对任意正整数 $\alpha>0,\ x\geq 1$，有 $\sum_{n\leq x}Z\omega^{\alpha}(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_{p}\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]+O(x^{\alpha+0.5+\varepsilon})$. 特别，当 $\alpha=1$ 时，有 $\sum_{n\leq x}Z\omega(n)=\frac{x^{2}}{2}\prod_{p}\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\right]+O(x^{1.5+\varepsilon})$，其中：$\prod_{p}$ 表示对所有素数求积；$\zeta(s)$ 为 Riemann zeta 函数.

引理 3 对任意正整数 $x\geq 1$，有 $\sum_{n\leq x}Z\omega(2n)=\frac{8x^{2}}{5}\prod_{p}\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\right]+O(x^{1.5+\varepsilon})$.

证明 设 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z\omega(2n)}{n^{s}}$，则由 Euler 求和公式和 $Z\omega(n)$ 的定义有 $f(s)=\prod_{p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(2p^{m})}{p^{ms}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(2^{m+1})}{2^{ms}}\times$

$$\prod_{p>2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(2p^{m})}{p^{ms}}=\frac{2\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}+p}\right)\frac{\left(\prod_{p>2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(p^{m})}{p^{ms}}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(2^{m+1})}{2^{ms}}\right)}{\prod_{p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(p^{m})}{p^{ms}}}=\frac{2\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}+p}\right)\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(2^{m+1})}{2^{ms}}}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z\omega(2^{m})}{2^{ms}}}=$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\prod_{p}\left[1-\frac{1}{p^{s}+p}\right]\cdot\frac{2^{s+2}}{2^{s}+1}$$，其中：$\zeta(s)$ 为 Riemann zeta 函数.

因为 $|Z\omega(2n)|\leq 2n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z\omega(n)}{n^{\sigma}}<2\zeta(\sigma-1)$，其中：$\sigma>2$ 为 s 的实部，则由 Perron 公式[6]有 $\sum_{n\leq x}\frac{\alpha(n)}{n^{s_0}}=$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}t}^{b+\mathrm{i}t}f(s+s_0)\frac{x^{s}}{s}\mathrm{d}s+O\left[\frac{x^{b}B(b+\sigma_0)}{T}\right]+O\left[x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\ \frac{\log x}{T}\right)\right]+O\left[x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\ \frac{x}{T\|x\|}\right)\right]$$，其中：N 是离 x 最近的整数，当 x 为半奇数时，取 $N=x-0.5$；$\|x\|=|x-N|$.

取 $\alpha(n)=Z\omega(2n)$，$s_0=0$，$b=3$，$T=x^{1.5}$，$H(x)=2x$，$B(\sigma)=2\zeta(\sigma-1)$，则有 $\sum_{n\leq x}Z\omega(2n)=$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{3-\mathrm{i}t}^{3+\mathrm{i}t}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}+p}\right)\frac{x^{s}}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{1.5+\varepsilon}\right).$$

因为函数 $\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^{s}+1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}+p}\right)\frac{x^{s}}{s}$ 在 $s=2$ 处有一个一阶极点，留数为 $\frac{8}{5}x^{2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}+p}\right)$，

所以 $\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{3-it}^{1.5+it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}ds\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{3-it}^{3+it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}ds+\right.\right.$ $\int_{3+it}^{1.5+it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}ds+\int_{1.5+it}^{1.5-it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}ds+$ $\left.\left.\int_{1.5-it}^{3-it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}ds\right]\right|=\frac{8}{5}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)$.

取 $T=x^{1.5}$，容易估计 $\left|\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{3+it}^{1.5+it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}ds+\int_{1.5+it}^{1.5-it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\times\right.\right.$ $\left.\left.\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}ds+\int_{1.5-it}^{3-it}\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2s-2)}\frac{2^{s+2}}{2^s+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p}\right)\frac{x^s}{s}\right]ds\right|<<x^{1.5+\varepsilon}$，所以 $\sum_{n\le x}Z\omega(2n)=$ $\frac{8x^2}{5}\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\right]+O(x^{1.5+\varepsilon})$.　证毕.

定理　对于任意的实数 $x\ge1$，有渐近公式 $\sum_{n\le x}Z\omega\left(K(n)-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{9}{40}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}\right)+O(x^{1.5+\varepsilon})$，其中：$\prod_p$ 表示对所有素数求积；ε 表示任意给定的正数.

证明　由引理 3 可知，$\sum_{n\le x}Z\omega(2n)=\frac{8x^2}{5}\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\right]+O(x^{1.5+\varepsilon})$. 由 $k=K(n)-\frac{n(n+1)}{2}$，结合引理 1 和引理 2 有 $\sum_{n\le x}Z\omega(k)=\sum_{n\le x}Z\omega\left(K(n)-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\sum_{\substack{n\le x\\n=2m}}Z\omega\left(\frac{n}{2}\right)+\sum_{\substack{n\le x\\n\ne2m}}Z\omega(n)=\sum_{n\le0.5x}Z\omega(n)+\sum_{n\le x}Z\omega(n)-\sum_{n\le1.5}Z\omega(2n)=$ $\frac{9}{40}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}\right)+O(x^{1.5+\varepsilon})$，其中：$m$ 为任意正整数.　证毕.

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems，Not Solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993

[2] Le Maohua. On the pseudo Smarandache squarefree function[J]. Smarandache Notions Journal，2002（13）：229-236

[3] Zhang Yongfeng. On the near pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna，2007，3（1）：98-101

[4] Vyawahare A W. Near Pseudo Smarandache Function[J]. Smarandache Notions Journal，2004（14）：42-61

[5] Liu Huaning. Mean value on the pseudo Smarandache squarefree function[C]. Zhang Wenpeng. Research On Smarandache Problem In Number Theory，Phoenix：[s.n.]，2004：9-11

[6] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1991：98-101