关于广义Smarandache和的均值

李梵蓓
(内蒙古财经学院 统计与数学学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘 要: 利用初等方法、解析方法和高斯取整函数的性质, 研究广义Smarandache和函数 $S(n, m, k)$ 的均值性质, 给出一个有趣的渐近公式.

关键词: 广义Smarandache和函数; 均值; 初等方法; 解析方法; 渐近公式
中图分类号: O 156.4　　文献标志码: A　　文章编号: 1001-8735(2010)06-0555-02

1 引言及结论

近年来, 关于Smarandache问题的研究引起了许多学者的和数论爱好者的兴趣与关注, 并取得了不少有意义的研究成果[1-8]. 设 $n, k\geqslant 1$ 是两个整数, $m\geqslant 0$ 是任意一个给定的非负整数. 广义Smarandache和函数 $S(n,m,k)$ 定义为 $S(n,m,k)=\sum\limits_{i=0}^{[(n+m)/k]}(n-ki)$, 其中 $[x]$ 表示高斯取整函数, 即 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 例如, $S(7,9,2)=7+(7-2)+(7-4)+(7-6)+(7-8)+(7-10)+(7-12)+(7-14)+(7-16)=-2$; $S(7,3,2)=7+(7-2)+(7-4)+(7-6)+(7-8)+(7-10)=12$; $S(9,6,3)=9+(9-3)+(9-6)+(9-9)+(9-12)+(9-15)=9$; $S(15,5,4)=15+(15-4)+(15-8)+(15-12)+(15-16)+(15-20)=30$; 当 $n>k$ 且 $k\mid 2n$ 时, 有 $S(n,n-k,k)=n$. 函数 $S(n,m,k)$ 与高斯取整函数 $[x]$ 密切相关, 可以反映正整数 n 在 k 的倍数数列中的分布性质. 另外, 在数列 $\{S(n,m,k)\}$ 中, 正整数 n,m,k 满足什么条件时, $S(n,m,k)=0$, 能否刻画出这类整数的特征, 这些都是有意义的研究内容. 本文的主要目的是利用初等方法、解析方法和高斯取整函数的性质, 研究函数 $S(n,m,k)$ 的均值性质, 给出了一个有趣的均值公式.

定理　设 $k>1$ 及 $m\geqslant 0$ 为两个给定的整数, 那么对任意整数 $x>1$, 渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n,m,k)=\frac{1}{6k}x^3+\left(\frac{3}{4k}-\frac{1}{4}\right)x^2+\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{4}+\frac{k}{12}+m+\frac{m}{2k}-\frac{m^2}{2k}\right)x+R(x,k),$$

其中 $|R(x,k)|\leqslant\frac{5}{12}k^2+\frac{1}{2}km$.

2 定理的证明

文中使用的初等数论和解析数论知识可参阅文献[9-10]. 首先用高斯取整函数对函数 $S(n,m,k)$ 进行简化, 表示成易于求和的形式. 注意到高斯取整函数 $[x]=x-\{x\}$, 于是函数 $S(n,m,k)$ 可表示为

$$\begin{aligned}S(n,m,k)=&\sum_{i=0}^{[(n+m)/k]}(n-ki)=(n+1)\left[\frac{n+m}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{n+m}{k}\right]\left(1+\left[\frac{n+m}{k}\right]\right)=\\&\frac{(n+1)(n+m)}{k}-(n+1)\left\{\frac{n+m}{k}\right\}-\\&\frac{k}{2}\left(\frac{(n+m)^2}{k^2}-2\frac{n+m}{k}\left\{\frac{n+m}{k}\right\}+\left\{\frac{n+m}{k}\right\}^2+\frac{n+m}{k}-\left\{\frac{n+m}{k}\right\}\right)=\\&\frac{(n+m)(n+2-m-k)}{2k}+\left(m+\frac{k}{2}-1\right)\left\{\frac{n+m}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left\{\frac{n+m}{k}\right\}^2.\end{aligned}\tag{1}$$

收稿日期: 2010-06-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介: 李梵蓓(1953—), 女, 陕西省西安市人, 内蒙古财经学院教授, 从事基础数学与应用数学研究, E-mail: lifanbei1005@126.com.

其中$\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分，$0\leqslant\{x\}<1$.

对任意整数 $x>1$，对(1)式的第 1 部分求和，并应用 Euler 求和公式得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{(n+m)(n+2-m-k)}{2k}=\frac{x^3}{6k}+\frac{(3-k)x^2}{4k}+\frac{(12m+7-6m^2-3k-6mk)x}{12k}. \tag{2}$$

设 $x=k[\frac{x}{k}]+r\ (0\leqslant r<k)$，于是对(1)式的第 2 部分求和，并注意到当 n 通过模 k 的完全剩余系时，$n+m$ 也通过模 k 的完全剩余系，于是由分数部分函数$\{x\}$的性质可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}(m+\frac{k}{2}-1)\{\frac{n+m}{k}\}=(m+\frac{k}{2}-1)\sum_{n\leqslant x}\{\frac{n+m}{k}\}=\\&(m+\frac{k}{2}-1)\left\{\sum_{0\leqslant i\leqslant[\frac{x}{k}]-1}\ \sum_{ik<n\leqslant(i+1)k}\{\frac{n+m}{k}\}+\sum_{k[\frac{x}{k}]<n\leqslant x}\{\frac{n+m}{k}\}\right\}=\\&(m+\frac{k}{2}-1)[\frac{x}{k}]\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{k}+(m+\frac{k}{2}-1)\sum_{k[\frac{x}{k}]<n\leqslant x}\{\frac{n+m}{k}\}=\\&(m+\frac{k}{2}-1)[\frac{x}{k}]\ \frac{1}{k}\ \frac{(k-1)k}{2}+(m+\frac{k}{2}-1)\sum_{k[\frac{x}{k}]<n\leqslant x}\{\frac{n+m}{k}\}=\\&\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})(m+\frac{k}{2}-1)x+R_1(x,k),\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $|R_1(x,k)|\leqslant(m+\frac{k}{2})\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{k}\leqslant\frac{k}{2}(m+\frac{k}{2})$.

对(1)式的第 3 部分求和，并注意到完全剩余系及分数部分函数$\{x\}$的性质可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}\frac{k}{2}\left\{\frac{n+m}{k}\right\}^2=\frac{k}{2}\left\{\sum_{0\leqslant i\leqslant[\frac{x}{k}]-1}\ \sum_{ik<n\leqslant(i+1)k}\left\{\frac{n+m}{k}\right\}^2+\sum_{k[\frac{x}{k}]<n\leqslant x}\left\{\frac{n+m}{k}\right\}^2\right\}=\\&\frac{k}{2}[\frac{x}{k}]\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i^2}{k^2}+\frac{k}{2}\sum_{k[\frac{x}{k}]<n\leqslant x}\left\{\frac{n+m}{k}\right\}^2=\\&\frac{k}{2}[\frac{x}{k}]\ \frac{1}{k^2}\ \frac{k-1)k(2k-1)}{6}+\frac{k}{2}\sum_{k[\frac{x}{k}]<n\leqslant x}\left\{\frac{n+m}{k}\right\}^2=\frac{1}{12}(2k-3+\frac{1}{k})x+R_2(x,k),\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $|R_2(x,k)|\leqslant\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i^2}{k^2}\leqslant\frac{k^2}{6}$.

结合估计式(2)，(3)，(4)及恒等式(1)，立刻得到定理中的渐近公式，于是定理得证. 有趣的是，定理中的误差项与 x 无关，仅依赖于整数 k 和 m.

参考文献:

[1] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2008, 38(2): 1-3.

[2] Jianbin Chen. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15-18.

[3] Lü Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[4] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 71-74.

[5] Ge Jian. Mean value of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-112.

[6] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. Erhus University Press, 1996.

[7] 闫晓霞. Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2010, 39(3): 229-231.

[8] 朱敏慧. 关于 F. Smarandache 简单函数与 Dirichlet 除数和函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2010, 39(5): 441-443.

[9] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[12] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

(下转第 559 页)

-1. 当且仅当 $Z_*(n)=2^{k+1}-1$ 时，方程有解. 虽然 $\frac{2^{k+1}(2^{k+1}-1)}{2}\mid n$ 成立，但此时所取到的 $Z_*(n)=2^{k+1}-1$ 并不是满足 $Z_*(n)$ 定义的最大值. 因为等式 $3(2^{k+1}-1)=2bc+1$ 恒成立，即 $2(3\cdot 2^{k-1}-1)=bc$. 不失一般性，取 $b=2<2^{k+1}-1$, $c=3\cdot 2^{k-1}-1<4\cdot 2^{k-1}-1=2^{k-1}-1$. 显然，$3(2^{k-1}-1)\mid n$, $bc\mid n$，故

$$Z_*(n)\geqslant 3(2^{k-1}-1)-1>2^{k-1}-1.$$

由以上讨论知，该情况下方程(1)无解.

综合以上讨论，定理得证.

参考文献：

[1] Tian Chengliang. An equation involving the two Smarandache LCM dual functions [J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 104-107.

[2] Jozsef Sandor. On a dual of the Pseudo-Smarandache function [M]. Smarandache notions, American research press, 2002: 18-23.

[3] Majumdar A A K. On the dual functions $Z_*(n)$ and $S_*(n)$ [C]// Zhang Wenpeng. Research on Smarandache Problems in Number Theory. USA: Hexis, 2009: 74-77.

[4] Zhang Wenpeng, Li Ling. Two problems related to the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 1-3.

An Equation Involving the Pseudo-Smarandache Dual Function

WU Xin

(*Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an* 710127, *China*)

Abstract: The solvability of the equation $SL_*(n)=Z_*(n)$ was studied. It was proved that the equation has infinite positive integer solutions, and confirmed all concrete forms of every solution by using the elementary and combinatorial method and discuss separately.

Key words: Pseudo-Smarandache function; Smarandache LCM function; dual function; equation; positive integer solution

【责任编辑 陈汉忠】

(上接第 556 页)

On the Mean Value of the Smarandache Summands

LI Fan-bei

(*College of Mathematics and Statistics, Inner Mongolia Finance and Economics College, Hohhot* 010051, *China*)

Abstract: Let $n, k>1$ are two positive integers. $m\geqslant 0$ is another fixed integer. The general Smarandache Summands function $S(n,m,k)$ is defined by $S(n,m,k)=\sum_{i=0}^{[(n+m)/k]}(n-ki)$. The main purpose of this paper is using the elementary method, analytic method and the properties of the Gauss function to study the mean value properties of $S(n,m,k)$, and give an interesting asymptotic formula for it.

Key words: the general Smarandache Summands function; mean value; elementary method; analytic method; asymptotic formula

【责任编辑 陈汉忠】