DOI :10.16211/j.issn.1004-390x(n).2010.03.007
第 25卷 第 3期 云南农业大学学报 Vol. 25 No. 3
2010年 5月 Journal of Yunnan Agricultural University May 2010

关于平方补函数 SSC(n)的两个问题*

樊旭辉
(武警工程学院基础部,陕西 西安 710086)

摘要: Smarandache平方补函数 SSC(n)是定义在正整数集上的函数。对任意的正整数 n,其函数值 SSC(n)=m,这里 m是使得 mn是完全平方数的最小正整数。本文的主要目的是通过通过初等及解析的方法研究 lnSSC(n)的值的分布性质从而将 RUSSO[1]提出的两个极限问题彻底解决。

关键词: Smarandache平方补函数 SSC(n);渐近公式;极限
中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1004-390X(2010)03-0436-02

On Two Questions of the Smarandache Square Complementary Function

FAN Xu-hui
(Foundation Department, Engineering College of Armed Police Force, Xi'an 710086, China)

Abstract: For any positive integer n, the Smarandache square complementary function SSC(n) is defined as the smallest integer m such that mn is a perfect square. The main purpose of the paper is to study the arithmetical properties of lnSSC(n) by the elementary and analytic methods, and solve two problems which were proposed by RUSSO[1].

Key words: Smarandache square complementary function SSC(n); asymptotic formula; limit

1 引言及结论

Smarandache平方补函数 SSC(n)是定义在正整数集上的函数,对任意的正整数 n,其函数值 SSC(n)=m,这里 m是使得 mn是完全平方数的最小正整数。由 SSC(n)的定义,我们容易计算 SSC(1)=1, SSC(2)=2, SSC(3)=3, SSC(4)=1, SSC(5)=5, SSC(6)=6, SSC(7)=7, SSC(8)=2, SSC(9)=1, SSC(10)=10…。

关于 SSC(n)的初等性质,许多学者进行研究,取得了一系列研究成果。例如 RUSSO[1]中对 SSC(n)进行研究,得出了关于 SSC(n)的一些性质:

性质 1. 对于任意正整数 n,有 SSC(n)$\leqslant$n.

性质 2. 对于任意正整数 n,如果 n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,那么

$$SSC(n)=p_1^{odd(\alpha_1)}p_2^{odd(\alpha_2)}\cdots p_s^{odd(\alpha_s)},$$

其中 $\alpha_i\geq 0$, $p_i(1,2,\cdots,s)$是互不相同的素数。

函数 odd(n)定义为:

$$odd(n)=\begin{cases}1 & 若\ n是奇数\\ 0 & 若\ n是偶数\end{cases}$$

RUSSO[1]同时提出如下问题:

问题 1: 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}$.

问题 2: 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{SSC(n)}{\theta(n)}$,其中 $\theta(n)$

收稿日期: 2008-10-15 修回日期: 2009-06-26
*基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)。
作者简介: 樊旭辉(1975-),男,陕西西安人,讲师,硕士,主要从事数论及应用研究。
E-mail: xuhuifan2050@163.com

$$=\sum_{k\leqslant n}\ln SSC(k).$$

本文的主要目的是通过研究 $\ln SSC(n)$的值的分布性质从而解决上述两个极限问题，具体地说就是证明了下面结论：

定理 1. 对于任意正整数 $n\geqslant 1$，有估计式

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

推论 1. 对于任意正整数 $n\geqslant 1$，有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}=1$$

定理 2. 对于任意正整数 $n\geqslant 1$，有估计式

$$\frac{SSC(n)}{\theta(n)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

推论 2. 对于任意正整数 $n\geqslant 1$，有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{SSC(n)}{\theta(n)}=0$$

2 引理及其证明

为了完成定理的证明，需要如下几个引理：

引理 1.[2] 对于任意实数 $x\geqslant 2$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)=\frac{6}{\pi^2}x+O(\sqrt{x}) \tag{1}$$

注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，因此（1）式可写为

$$\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\sqrt{x}) \tag{2}$$

其中 $\zeta(n)$表示 Riemann-Zate函数.

引理 2. 对于任意实数 $x\geqslant 2$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\ln SSC(n)=x\ln x-Ax+O(\sqrt{x}\ln^2 x) \tag{3}$$

其中 A为常数。

证明：如果用 $\bar{A}$表示所有无平方因子数的集合，那么由 Abel求和公式（参阅文献 [3] 中定理 4.2）、引理 1及性质 2，有

$$\sum_{n\leqslant x}\ln SSC(n)=\sum_{m^2l\leqslant x,\ l\in\bar{A}}\ln SSC(m^2l)=$$

$$\sum_{m^2l\leqslant x,\ l\in\bar{A}}\ln l=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{l\leqslant\frac{x}{m^2}}\ln l\cdot\mu^2(l)=$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\left\{\ln\frac{x}{m^2}\left[\frac{1}{\zeta(2)}\frac{x}{m^2}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{m}\right)\right]-\int_1^{\frac{x}{m^2}}\frac{1}{t}\left[\frac{t}{\zeta(2)}+O(\sqrt{t})\right]dt\right\}=$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x\ln x}{\zeta(2)}\frac{1}{m^2}-\frac{2x}{\zeta(2)}\frac{\ln m}{m^2}-\frac{x}{\zeta(2)}\frac{1}{m^2}+O\left(\frac{\sqrt{x}\ln x}{m}\right)\right] \tag{4}$$

注意到下列几个渐近公式[3]：

$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\ln x+C+O\left(\frac{1}{x}\right)$，其中 C为常数；

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)-\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln n}{n^2}=B-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+O\left(\frac{\ln x}{x^2}\right),$$

其中 $B=1+\int_1^{\infty}\frac{(t-[t])(t-2t\ln t)}{t^4}dt$为常数。

由（4）式，有

$$\sum_{n\leqslant x}\ln SSC(n)=\frac{x\ln x}{\zeta(2)}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^2}-\frac{2x}{\zeta(2)}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{\ln m}{m^2}-\frac{x}{\zeta(2)}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^2}+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)$$

$$=x\ln x-\frac{2}{\zeta(2)}Bx-x+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)$$

$$=x\ln x-Ax+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right),$$

其中 $A=\frac{2B}{\zeta(2)}+1$为常数

于是完成了引理 2的证明。

3 定理的证明

在这一部分，用初等方法给出定理的证明. 首先证明定理 1。

一方面，由性质 1，有

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}\leqslant\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}}{n}=\frac{n-1}{n}<1 \tag{5}$$

另一方面，由引理 2，有

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}>\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=2}^{n}\ln SSC(k)$$

$$=1-\frac{A}{\ln n}+O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \tag{6}$$

结合（5）、（6）式，有

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是完成了定理 1的证明。

推论 1可理解为定理 1中取 $n\to\infty$时的极限。

现在证明定理 2。

（下转第 446页）

于 PDA培养基，接入线虫后，其食物来源充足，繁殖空间较大。

（3）能否适用于其他线虫的培养与收集

在实验室培养霍夫曼伞滑刃线虫（B. hoffmanni）和赫列尼库斯伞滑刃线虫（B. hellenicus）[7]过程中，也观察到虫体向上迁移且聚集于水滴中现象，本装置应该同样适用于这两种伞滑刃线虫的培养收集。植物线虫大多具有趋水性、喜氧性，对于伞滑刃线虫以外的可人工离体培养的线虫种类，也应该可以用本装置进行培养与收集，但需试验验证。

[参考文献]

[1] 杨宝君，潘宏阳，汤坚，等．松材线虫病［M］．北京：中国林业出版社，2003：148－149.

[2] 曾永三．松材线虫的人工培养研究［D］．广州：华南农业大学，1990：47－49.

[3] 蔡思明，叶为民，杨伟东．繁殖松材线虫最佳真菌筛选试验［J］．植物病理学报，1994，24（2）：100.

[4] 陈士瑜．菇菌生产技术全书［M］．北京：中国农业出版社，1998：278－279.

[5] 白兴月，程瑚瑞．松材线虫的大量繁殖和少量松材线虫的表面消毒新技术［J］．植物检疫，1992，6（6）：420－421.

[6] 刘维志．植物线虫研究技术［M］．沈阳：辽宁科学技术出版社，1995：146－159.

[7] 丹阳．云南松树上伞滑刃线虫鉴定和拟松材线虫种群类型划分［D］．昆明：云南农业大学，2002：12－15.

（上接第 437页）

由性质 1、引理 2及 SSC(n)的定义，有

$$0 < \frac{SSC(n)}{\theta(n)} < \frac{n}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \qquad (7)$$

由（7）式，有

$$\frac{SSC(n)}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是证明了定理 2。

推论 2可理解为定理 2中取 $n\to\infty$时的极限。

4 总结

本文通过利用初等及解析的方法研究 $\ln SSC(n)$的值的分布性质从而将 RUSSO[1]提出的两个极限问题彻底解决。关于 Smarandache平方补函数 SSC(n)的性质目前知之甚少，还有许多问题有待有兴趣的学者进行研究。例如，

问题 1. 求方程 $S(n)^k + Z(n)^k = SSC(n)^k$的所有正整数解，其中 S(n)是 Smarandache函数（定义参阅文献[4]），Z(n)是伪 Smarandache函数（定义参阅文献[5]），k是任意整数．

问题 2. 研究函数 SSC[Z(n)]及函数 Z[SSC(n)]的性质。

[参考文献]

[1] RUSSO F. An introduction to the Smarandache square complementary function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13（1－2－3）：160－172.

[2] SANDOR J, MITRINOVIC D S, CRSTICI B. Handbook of Number Theory I [M]. 2nd edition. Boston London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[3] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Spinger-Verlag, 1976.

[4] ASHBACHER C. An introduction to the Smarandache function [M]. Vail: Erhus University Press, 1995.

[5] KENICHIRO K. Comment and topics on Smarandache notions and problems [M]. Vail: Erhus University Press, 1996.