第 33 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2011 年 8 月
Vol. 33　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2011

文章编号：1673-9868(2011)08-0102-04

关于含伪 Smarandache 函数及其对偶函数的方程的可解性

吴　欣

西北大学 数学系，西安 710127

摘要：研究方程 $Z(n)+Z_*(n)=n$ 的可解性. 利用初等方法和组合方法，借助同余方程，通过分类讨论证明了该方程有无限多个正整数解，并给出所有解的具体形式，彻底解决了 2 个猜想.

关　键　词：伪 Smarandache 函数；对偶函数；可解性；方程

中图分类号：O156. 4　　文献标志码：A

对任意正整数 n，著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为满足 $\sum\limits_{k=1}^{m}k$ 能被 n 整除的最小的正整数 m，即 $Z(n)=\min\left\{m: m\in\mathbb{N}_+,\ n \mid \dfrac{m(m+1)}{2}\right\}$. 由 $Z(n)$ 的定义容易推出 $Z(1)=1$，$Z(2)=3$，$Z(3)=2$，$Z(4)=7$，$Z(5)=4$，$Z(6)=3$，$Z(7)=6$，$Z(8)=15$，$Z(9)=8$，$Z(10)=4$，$Z(11)=10$，…. 许多学者研究了函数 $Z(n)$ 的性质，得到了一些重要的结果和猜想[1-3]：

(a) 对于任意正整数 n，有 $Z(n)\geqslant 1$；

(b) 对于任意奇素数 p 和正整数 k，有 $Z(p^k)=p^k-1$，$Z(2^k)=2^{k+1}-1$；

(c) 若 n 为任意合数，则 $Z(n)=\max\{Z(m): m\mid n\}$.

文献[4]引入了函数 $Z(n)$ 的对偶函数 $Z_*(n)$，将其定义为满足 n 能被 $\sum\limits_{k=1}^{m}k$ 整除的最大的正整数 m，即 $Z_*(n)=\max\left\{m: m\in\mathbb{N}_+,\ \dfrac{m(m+1)}{2}\mid n\right\}$. 例如 $Z_*(n)$ 的前几个值为 $Z_*(1)=1$，$Z_*(2)=1$，$Z_*(3)=2$，$Z_*(4)=1$，$Z_*(5)=1$，$Z_*(6)=3$，$Z_*(7)=1$，$Z_*(8)=1$，$Z_*(9)=2$，…. 由文献[4-5]，$Z_*(n)$ 具有如下性质：

(d) 2 个奇素数 p,q 若满足 $p=2q-1$，则 $Z(pq)=p$；若 $p=2q+1$，则 $Z(pq)=p-1$；

(e) 若 $n=3^s t$ (s 为任意正整数，t 为合数)，则 $Z_*(n)\geqslant 2$；

(f) 对所有正整数 a,b，有 $Z_*(ab)\geqslant\max\{Z(a), Z(b)\}$.

在第五届国际数论与 Smarandache 问题研讨会期间，张文鹏教授建议研究一类包含函数 $Z(n)$ 及其对偶函数 $Z_*(n)$ 的方程

$$Z(n)+Z_*(n)=n \tag{1}$$

的可解性，并提出下面的猜想：

收稿日期：2010-06-18

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071194).

作者简介：吴　欣(1986-)，女，陕西咸阳人，硕士研究生，主要从事基础数学的研究.

猜想　(A) 方程(1) 只有有限个偶数解，也许只有一个偶数解 $n=6$；

(B) 方程(1) 的所有奇数解必为奇素数 p 的方幂 ($p\geqslant 5$).

关于此问题，文献[6] 对其进行了研究，证明了猜想(B)，并声称猜想(A) 仍是公开的问题．我们发现，其证明过程存在一些漏洞．基于这一原因，本文对这 2 个猜想均进行了研究，利用初等方法和组合方法证实了这 2 个猜想，得到了下面的结论：

定理　方程(1) 有且只有一个偶数解 $n=6$；方程(1) 的所有奇数解为 $n=p^k$，其中 $p\geqslant 5$，且 p 为素数，k 为任意正整数.

证　1) 当 n 为偶数时，分以下 4 种情况来证明：

1.1) 当 $n=2^k(k\geqslant 1)$ 时，有 $Z(2^k)=2^{k+1}-1$，$Z_*(2^k)=1$．从而 $Z(2^k)+Z_*(2^k)\neq 2^k$，故 2^k 不是方程(1) 的解.

1.2) 当 $n=2p$ (p 为奇素数) 时，若 $p=3$，则 $Z(6)=3$，$Z_*(6)=3$，从而 $Z(6)+Z_*(6)=6$，故 $n=6$ 是方程(1) 的解；若 $p=5$，则 $Z(10)=4$，$Z_*(10)=4$，从而 $Z(10)+Z_*(10)=8\neq 10$，故 $n=10$ 不是方程(1) 的解；若 $p>5$，则 $Z_*(2p)=1$，当且仅当 $Z(2p)=2p-1$ 时，方程(1) 有解．则需 $2p\mid \dfrac{2p(2p-1)}{2}$，由此得到 $2p-1$ 为偶数，矛盾.

1.3) 当 $n=2^kp^\alpha$ (k,α 为正整数) 时，若 2^k 与 p^α 之间存在形如 $A=2B\pm 1$ 的关系式，则只能为

$$p^x=2\cdot 2^y\pm 1 \tag{2}$$

而不可能存在 $2^y=2\cdot p^x\pm 1$．这里 x,y 是分别小于 α,k 的正整数．事实上，总会存在不止一对的 x 和 y，使得(2) 式成立，我们取满足(2) 式成立的最大的 x 和 y 分别记作如下讨论中的 b,d 与 a,c：

1.3.1) 若 $p^x=2\cdot 2^y-1$，则 $Z_*(n)=\max\{p^x\}=p^b=2\cdot 2^a-1$．令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=2^kp^\alpha-p^b=2^kp^\alpha-2\cdot 2^a+1$$

则有

$$2^kp^\alpha \mid \frac{(2^kp^\alpha-p^b)(2^kp^\alpha-2\cdot 2^a+2)}{2} \tag{3}$$

当 $k=1$ 时，则 $a=1$，可得 $p^b=3$，于是归结为 $n=2p$ 的形式；当 $k>1$ 时，我们由(3) 式得

$$2^kp^{\alpha-b}\mid (2^kp^{\alpha-b}-1)(2^{k-1}p^\alpha-2^a+1)$$

显然，无论 $b=\alpha$ 还是 $b<\alpha$，偶数都不可能整除 2 个奇数之积，故此时方程(1) 无解.

1.3.2) 若 $p^x=2\cdot 2^y+1$，则 $Z_*(n)=\max\{p^x-1\}=p^d-1=2\cdot 2^c$．令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=2^kp^\alpha-p^d+1=2^kp^\alpha-2\cdot 2^c$$

则有

$$2^kp^\alpha \mid \frac{(2^kp^\alpha-2\cdot 2^c)(2^kp^\alpha-p^d+2)}{2} \tag{4}$$

当 $k=c$ 时，由(4) 式有 $2p^\alpha\mid (p^\alpha-2)(2^kp^\alpha-p^d+2)$，偶数不可能整除奇数，方程(1) 此时无解；当 $k>c$ 时，有 $2^{k-c}p^\alpha\mid (2^{k-c-1}p^\alpha-1)(2^kp^\alpha-p^d+2)$，而 $p^\alpha\mid (2^{k-c-1}p^\alpha-1)(2^kp^\alpha-p^d+2)$ 不可能成立，从而此时方程(1) 无解.

1.3.3) 若不存在关系式(2)，则 $Z_*(n)=1$．而 $Z(n)\neq n-1$，否则同情况 1.2) 中的讨论一样，得到奇数被 2 整除的矛盾.

1.4) 当 $n=2^kuv$ 时，其中 $(2^k, u)=(u, v)=(v, 2^k)=1$．记 x,y 分别为 u,v 的因子，z 为小于 k 的正整数．n 的各个因子之间若存在形如 $A=2B\pm 1$ 的关系式，只可能为 $x=2\cdot 2^z\pm 1$ 或 $x=2y\cdot 2^z\pm 1$，而不可能存在 $2^z=2x\pm 1$ 或 $2^zy=2x\pm 1$．显然存在多对 x,y,z 满足下面讨论中所涉及的不定方程：

1.4.1) 若 $x=2\cdot 2^z-1$，则 $Z_*(n)=\max\{x\}=x_1=2\cdot 2^{z_1}-1$．令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=2^kuv-x_1=2^kuv-2\cdot 2^{z_1}+1$$

不失一般性，设 $u=ex_1$，则有

$$2^kuv \mid \frac{(2^kuv-x_1)(2^kuv-2\cdot 2^{z_1}+2)}{2} \tag{5}$$

当 $k=1$ 时，有 $z_1=1$，可得 $2ev \mid (2ev-1)(uv-1)$，然而 $v \mid (2ev-x_1)(uv-1)$ 不可能成立，故得出矛盾；当 $k>1$ 时，有 $2^k ev \mid (2^k ev-1)(2^{k-1}uv-2^{z_1}+1)$，从而得到偶数整除奇数的矛盾.

1.4.2) 若 $x=2\cdot 2^z+1$，则 $Z_*(n)=\max\{x-1\}=x_2-1=2\cdot 2^{z_2}$. 令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=2^k uv-x_2+1=2^k uv-2\cdot 2^{z_2}$$

则

$$2^k uv \mid \frac{(2^k uv-2\cdot 2^{z_2})(2^k uv-2\cdot 2^{z_2}+1)}{2} \tag{6}$$

当 $k=z_2$ 时，有 $2uv \mid (uv-2)(2^k uv-2^{k+1}+1)$，偶数不可能整除奇数，得出矛盾；当 $k>z_2$ 时，有

$$2^{k-z_2+1}uv \mid (2^k uv-2)(2^k uv-x_2+2)$$

而 $u \mid (2^k uv-2)(2^k uv-x_2+2)$ 不可能成立，得出矛盾.

1.4.3) 若 $x=2y\cdot 2^z-1$，则 $Z_*(n)=\max\{x\}=x_3=2y_3\cdot 2^{z_3}-1$. 令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=2^k uv-x_3=2^k uv-2y_3\cdot 2^{z_3}+1$$

不失一般性，设 $u=tx_3$，则有

$$2^k uv \mid \frac{(2^k uv-x_3)(2^k uv-2y_3\cdot 2^{z_3}+2)}{2} \tag{7}$$

当 $k=1$ 时，有 $z_3=1$，可得 $2tv \mid (2tv-1)(uv-2y_3+1)$，然而 $v \mid (2tv-1)(uv-2y_3+1)$ 不可能成立，得出矛盾；当 $k>1$ 时，有 $2^k tv \mid (2^k tv-1)(2^{k-1}uv-2^{z_3}y_3+1)$，故得到偶数整除奇数的矛盾.

1.4.4) 若 $x=2y\cdot 2^z+1$，则 $Z_*(n)=\max\{x-1\}=x_4-1=2y_4\cdot 2^{z_4}$. 令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=2^k uv-x_4+1=2^k uv-2y_4\cdot 2^{z_4}$$

不失一般性，设 $v=sy_4$，则有

$$2^k uv \mid \frac{(2^k uv-2y_4\cdot 2^{z_4})(2^k uv-2y_4\cdot 2^{z_4}+1)}{2} \tag{8}$$

当 $k=z_4$ 时，有 $2uv \mid (uv-2y_4)(2^k uv-2^{z_4+1}y_4+1)$，偶数不可能整除奇数，得出矛盾；当 $k>z_4$ 时，有 $2^{k-z_4+1}su \mid (2^{k-z_4}su-2)(2^k uv-x_4+2)$，而 $u \mid (2^{k-z_4}su-2)(2^k uv-x_4+2)$ 不可能成立，得出矛盾.

1.4.5) 若不存在以上 4 种关系式，则 $Z_*(n)=1$. 而 $Z(n)\neq n-1$，否则会得出 $n-1$ 为偶数的矛盾.

综上所述，方程(1)的偶数解有且仅有一个，为 $n=6$.

2) 当 n 为奇数时，分以下 3 种情况讨论：

2.1) 显然 $n=1$ 不是方程(1)的解.

2.2) 当 $n=p^k$(p 为奇素数，k 为正整数)时，若 $p=3$，则 $Z(n)=n-1$，$Z_*(n)=2$，从而 $Z(n)+Z_*(n)\neq n$；若 $p\geqslant 5$，则 $Z(n)=n-1$，$Z_*(n)=1$. 故 $n=p^k$ 是方程(1)的解.

2.3) 当 n 含有多个不同素因子时，设 $n=uv$，这里 $(u,v)=1$. 取 x, y 分别为 u, v 的因子. 不失一般性，设 $u>v$. 分下列几种情况讨论：

2.3.1) 若存在关系式 $x=2y-1$. 设 $Z_*(n)=\max\{x\}=x_1=2y_1-1$. 记 $u=bx_1$. 令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=uv-x_1=uv-2y_1+1$$

则有 $uv \mid \dfrac{(uv-x_1)(uv-2y_1+2)}{2}$，由此可得

$$bv \mid \frac{(bv-1)(uv-2y_1+2)}{2}$$

而

$$v \mid \frac{(bv-1)(uv-2y_1+2)}{2}$$

显然不成立，故得出矛盾.

2.3.2) 若存在关系式 $x=2y+1$. 设 $Z_*(n)=\max\{x-1\}=x_2-1=2y_2$. 记 $v=dy_2$. 令

$$Z(n)=m=n-Z_*(n)=uv-x_2+1=uv-2y_2$$

则有 $uv \mid \dfrac{(uv-x_2+2)(uv-2y_2)}{2}$. 故 $2du \mid (du-2)(uv-x_2+2)$，而 $u \mid (du-2)(uv-x_2+2)$，显然

不成立，故得出矛盾.

2.3.3) 若不存在形如 $x=2y\pm1$ 的关系式，则 $Z_*(n)=1$. 令 $Z(n)=m=n-1$，显然 $n\mid\frac{n(n-1)}{2}$ 成立. 下证此时取到的 m 不是满足 $Z(n)$ 定义的最小值.

由同余方程 $uX\equiv1\pmod v$ 有解，可得 $u^2X^2\equiv1\pmod v$ 有解，其解不妨设为 Y，则可取 $1\leqslant Y\leqslant v-1$. 则 $v\mid(uY-1)(uY+1)$.

当 $v\mid(uY-1)$ 时，有 $n=uv\mid\frac{uY(uY-1)}{2}$，故 $Z(n)=m\leqslant uY-1\leqslant u(v-1)-1<uv-1$；

当 $v\mid(uY+1)$ 时，有 $n=uv\mid\frac{uY(uY+1)}{2}$，故 $Z(n)=m\leqslant uY\leqslant u(v-1)<uv-1$.

故 $m=n-1$ 不是满足 $Z(n)$ 定义的最小值.

综合以上几种情况，奇数 n 是方程(1)的解当且仅当 $n=p^k$，其中 $p\geqslant5$ 为素数，k 为正整数.

综上所述，定理成立.

致谢：衷心感谢导师张文鹏教授的悉心指导！

参考文献：

[1] MAJUMDAR A A K. A Note on the Pseudo-Smarandache Function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 1-25.

[2] GUNARTO H, MAJUMDAR A A K. On Numerical Values of $Z(n)$ [M] //Zhang Wen-peng. Research on Number Theory and Smarandache Notions: Proceedings of the Fifth International Conference on Number Theory and Smarandache Notions. London: Hexis, 2009: 34-50.

[3] MAJUMDAR A A K. On the Dual Functions $Z_*(n)$ and $S_*(n)$ [M] //Zhang Wen-peng. Research on Number Theory and Smarandache Notions: Proceedings of the Fifth International Conference on Number Theory and Smarandache Notions. London: Hexis, 2009: 74-77.

[4] JOZSEF S. On a Dual of the Pseudo-Smarandache Function [M]. London: American Research Press, 2002: 18-23.

[5] WU Xin, LI Xiao-yan. An Equation Involving Function $S_c(n)$ and $Z_*(n)$ [M] //Zhang Wen-peng. Research on Number Theory and Smarandache Notions: Proceedings of the Fifth International Conference on Number Theory and Smarandache Notions. London: Hexis, 2009: 52-56.

[6] 张　瑾. 一个包含伪 Smarandache 函数及其对偶函数的方程 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(4): 786-788.

The Solvability for an Equation Involving the Pseudo-Smarandache Function and Its Dual Function

WU　Xin

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: The solvability of the equation $Z(n)+Z_*(n)=n$ is studied. It is proved that the equation has infinite positive integer solutions, and all concrete forms of every solution are confirmed by using the elementary combinatorial method, especially via congruent equation. Finally, two conjectures are solved.

Key words: pseudo-Smarandache function; dual function; solvability; equation

责任编辑　廖　坤