DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2008.02.002
西北大学学报(自然科学版)
2008年4月,第38卷第2期,Apr.,2008,Vol.38,No.4
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
JNWU

关于伪Smarandache无平方因子函数的一个问题

熊文井

(陕西教育学院 数理系,陕西 西安 710061)

摘要:目的 研究一个包含伪Smarandache无平方因子函数 $Z_w(n)$ 的极限问题。方法 利用初等及解析方法。结果 证明了该极限存在且其值为1。结论 解决了Felice Russo在文献 A set of new Smarandache functions, sequences and conjectures in number theory中提出的一个极限问题。

关 键 词:伪Smarandache无平方因子函数;初等方法;极限
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2008)02-0192-03

1 引言及结论

对任意正整数 n,著名的伪Smarandache无平方因子函数 $Z_w(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m^n$。即就是 $Z_w(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m^n\}$。这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F. Smarandache教授在他所著的Only Problems, Not Solutions一书中引入的,并建议人们研究它的性质[1]。从 $Z_w(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式,那么 $Z_w(n)=p_1p_2\cdots p_r$。由此,也不难计算出 $Z_w(n)$ 的前几个值为:$Z_w(1)=1$,$Z_w(2)=2$,$Z_w(3)=3$,$Z_w(4)=2$,$Z_w(5)=5$,$Z_w(6)=6$,$Z_w(7)=7$,$Z_w(8)$,$Z_w(9)=3$,$Z_w(10)=10$,$Z_w(11)=11$,$Z_w(12)=6$,$Z_w(13)=13$,$Z_w(14)=14$,$Z_w(15)=15$,$Z_w(16)=2$,…。关于 $Z_w(n)$ 的算术性质,许多学者进行了研究,获得了不少有趣的结果[3-7]。例如Le Maohua[3]证明了级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Z_w(n))^a},\quad a\in R,\ a>0$$

是发散的。刘华宁研究了函数 $Z_w(n)$ 的均值性质[4],并获得了两个有趣的恒等式及渐近公式。即证明了对任意实数 α,满足 $s-\alpha>1$ 及 $\alpha>0$,有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Z_w(n))^{\alpha}}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right]。$$

其中 $\zeta(s)$ 为Riemann Zeta函数,$\prod_p$ 表示对所有素数求积。

对任意实数 $\alpha>0$ 及 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(Z_w(n))^{\alpha}=\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]+O(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon})。$$

现在对任意正整数 $n>1$,考虑和式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k}。\tag{1}$$

Felice Russo在文献[2]中建议我们研究当 $n\to\infty$ 时,式(1)的极限是否存在?如果存在,确定其值。关于这一问题,至今似乎没有人研究,至少我们没有看到过有关方面的论文。本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题,并得到彻底解决。亦即证明了下面更强的定理。

定 理 对任意正整数 $n>1$,有估计式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)。$$

显然,这是一个比文献[2]中问题更强的结论。由此定理立刻得到下面的推论。

推 论 对任意正整数 n,有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k}=1。$$

收稿日期:2007-11-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:熊文井(1967—),女,福建永定人,陕西教育学院讲师,从事数论研究。

2 定理的证明

利用初等方法给出定理的直接证明。令 $U(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k}$。首先，估计 $U(n)$的上界。事实上当 $k>1$时，由 $Z_w(k)$的定义不难推出 $Z_w(k)$表示 k的所有不同素因数的乘积，所以对任意正整数 k有 $Z_w(k) \leqslant k$及 $\ln(Z_w(k)) \leqslant \ln k$，从而有估计式

$$U(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{\ln k} = n-1 \leqslant n。 \qquad (2)$$

其次，估计 $U(n)$的下界。对任意正整数 $2 \leqslant k \leqslant n$，设 $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$为 k的标准分解式，将区间 $[2, n]$中的所有整数分成两个子集 A及 B，其中 A表示区间 $[2, n]$中所有满足条件 $\alpha_i \geqslant 2\ (i=1, 2, \cdots, s)$的正整数 k的集合；B表示区间 $[2, n]$中所有满足至少有一个 $\alpha_i = 1\ (1 \leqslant i \leqslant s)$的正整数 k的集合。于是有

$$U(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(Z_w(k))}{\ln n} = \frac{1}{\ln n}\sum_{k\in A} \ln(Z_w(k)) + \frac{1}{\ln n}\sum_{k\in B} \ln(Z_w(k))。 \qquad (3)$$

显然由集合 A的定义可知 A是区间 $[2, n]$中所有 Square-full数的集合，所以有估计式

$$\sum_{k\in A} \ln(Z_w(k)) \leqslant \sum_{k\in A} \ln k \leqslant \sqrt{n} \cdot \ln n。 \qquad (4)$$

另一方面，对于任意 $n \in B$，一定存在一个素数 p使得 $p \mid n$且 $\left(p, \frac{n}{p}\right) = 1$。同时注意到素数定理的几种不同形式[8-10]

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1),$$

$$\sum_{p\leqslant n} \ln p = n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

及

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p^2} = D + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)。$$

其中 D为正常数。于是有估计式

$$\sum_{k\in B} \ln(Z_w(k)) = \sum_{\substack{pk\leqslant n \\ (p,k)=1}} \ln(Z_w(pk)) = \sum_{\substack{pk\leqslant n \\ (p,k)=1}} (\ln p + \ln(Z_w(k))) \geqslant$$

$$\sum_{\substack{pk\leqslant n \\ (p,k)=1}} \ln p = \sum_{p\leqslant n} \ln p \sum_{\substack{k\leqslant \frac{n}{p} \\ (p,k)=1}} 1 = \sum_{p\leqslant n} \ln p\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{p^2} + O(1)\right) =$$

$$n\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} - n\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p^2} + O\left(\sum_{p\leqslant n} \ln p\right) = n \ln n + O(n)。 \qquad (5)$$

由式 (3) ~ (5)，得到估计式

$$U(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k} \geqslant \frac{1}{\ln n}\sum_{k\in B} \ln(Z_w(k)) + O(\sqrt{n}\ln n) \geqslant \frac{1}{\ln n}(n \ln n + O(n)) + O(\sqrt{n}\ln n) = n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)。 \qquad (6)$$

结合式 (2)及 (6)，立刻推出渐近公式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(Z_w(k))}{\ln k} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)。$$

于是完成了定理的证明。

推论可以理解为定理中取 $n \to \infty$。

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] FELICE R. A set of new Smarandache functions, sequences and conjectures in number theory[M]. Lupton: American Research Press, 2000.

[3] LE Mao-hua. On the pseudo-Smarandache-squarefree function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 229-236.

[4] LIU Hua-ning, GAO Jing. Research on Smarandache problems in number theory[M]. Chicago: Xiquan Publ House, 2004: 9-11.

[5] LE Mao-hua. Two function equations[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.

[6] 陈国慧. 一个包含无 k次方幂函数的方程[J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2007, 37(5): 694-696.

[7] 潘晓玮. 一个包含 Smarandache LCM比率数列的极限问题[J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2007, 37(5): 709-710.

[8] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[9] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

(编　辑　亢小玉)

(下转第 198页)

弱;对剪切攻击,其恢复图像相当于原始图像受同等程度的剪切攻击。

4 结 语

本文在图像置乱过程中使用了两种混沌序列生成器,并在其非线性离散化过程中使用了其改进方法,算法的时间复杂度与使用一个混沌序列生成器的时间复杂度一致,但此算法大大提高了隐藏图像的安全性。实验证明该方法是一个简单、安全、有效的图像隐藏算法。

参考文献:

[1] MATTHEWS R A J. On the derivation of a chaotic encryption algorithm[J]. Cryptologia, 1989, 4: 29-42.

[2] BIANCO M E, MAYHEW G L. US Patent No. 5[S]. 1994, 365-588.

[3] ANDREW T Parker, KEVIN M Short. Reconstructing the key stream from chaotic encryption scheme[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems. I Fundamental Theory and Applications, 2001, 48(5): 624-630.

[4] 纪震, 李慧慧, 肖薇薇, 等. 基于混沌序列的数字水印信号研究[J]. 电子学报, 2004, 32(7): 1 131-1 134.

[5] 胡汉平, 刘双红, 王祖喜, 等. 一种混沌密钥流产生方法[J]. 计算机学报, 2004, 27(3): 408-411.

[6] 张雪峰, 范九伦, 康宝生. 一种抗剪切攻击的数字图像加密算法[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(8): 2 260-2 263.

[7] 罗启彬, 张健. 一种新的混沌伪随机序列生成方式[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(7): 1 262-1 265.

[8] 徐全生, 李震, 杜旭强. 一种基于混沌序列的图像加密算法[J]. 小型微型计算机系统, 2006, 27(9): 1 754-1 756.

[9] 李宏智, 刘晓光. 混沌序列在数字信息置乱中的应用[J]. 现代电子工程, 2006, (2): 53-55.

[10] 赵莉, 张雪峰, 范九伦. 一种改进的混沌序列产生方法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 23: 31-33.

[11] 徐祗军, 吴小娟, 董文会. 基于 Chebyshev混沌序列的数字图像扩频水印[J]. 电子技术与应用, 2005, 31(9): 11-13.

[12] 赵学峰. 基于混沌映射的数字图像置乱方法[J]. 微电子学与计算机, 2003, 20(8): 136-138.

[13] 张雪峰, 罗祖军, 高川. 基于混沌序列的数字图像加密算法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 19: 61-62.

[14] 张大奇, 康宝生. 基于 HVS和混沌序列的 DCT域数字图像隐藏技术[J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2006, 36(5): 741-746.

(编 辑 曹大刚)

A digital image hiding algorithm based on chaotic sequences

ZHAO Yu-xia[1,2], KANG Bao-sheng[1]

(1. School of Computer Science and Technology, Northwest University, Xi'an 710069, China; 2. Department of Computer Science, Shangluo University, Shangluo 726000, China)

Abstract: Aim Based on chaotic sequences to present a highly security digital image hiding algorithm is presented. Methods Both logistic mapping and hybird mapping are used in the image scrambling algorithm, then using chaotic sequences to hide the scrambled image in the stencil-plate image. Results Simulating experimentation shows that the algorithm is simple with high security and has certain anti-aggressivity to the shears. Conclusion It is a secure algorithm for the features of feasible generation, sensitivity to initial conditions and complete reappearance of the chaos sequence.

Key words: chaos sequences; nonlinear dispersion; image scrambling; image hiding

(上接第 193页)

On a problem of pseudo-Smarandache-squarefree function

XIONG Wen-jing

(Department of Mathematics and Physics, Shaanxi Institute of Education, Xi'an 710061, China)

Abstract: Aim To study a limit problem involving the famous pseudo-Smarandache-squarefree function $Z_w(n)$. Methods Using the elementary and analytic methods. Results It was proved that the value of the limit is 1. Conclusion A limited problem was solved, which was proposed by Felice Russo in his book "A set of new Smarandache functions, sequences and conjectures in number theory".

Key words: pseudo-Smarandache-squarefree function; summation; limit