关于伪Smarandache 函数的一个问题

杨明顺

(渭南师范学院数学系, 陕西 渭南 710082)

摘 要: 对任意正整数n, 著名的伪Smarandache 函数$Z(n)$ 定义为最小的正整数m使得$n \mid \frac{m(m+1)}{2}$. 本文的主要目的是利用初等方法研究Kenichiro Kashihara 提出的"求所有正整数n使得伪Smarandache 函数$Z(n)$为n的原根"这一问题, 并得到彻底解决. 即就是证明了$Z(n)$为n的原根当且仅当$n = 2, 3, 4$.

关 键 词: 伪Smarandache 函数; 原根; 初等方法
中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2008)03-0449-03

1 引言及结论

对任意正整数n, 著名的伪Smarandache 函数$Z(n)$ 定义为最小的正整数m使得$n \mid \frac{m(m+1)}{2}$. 即就是

$$Z(n) = \min\{m:\ n|\frac{m(m+1)}{2},\ m \in \mathbb{N}\}$$

其中$\mathbb{N}$表示所有正整数集合. 例如, $Z(n)$ 的前几个值为

$$Z(1)=1,\ Z(2)=3,\ Z(3)=2,\ Z(4)=7,\ Z(5)=4,\ Z(6)=3,\ Z(7)=6,\ Z(8)=15$$
$$Z(9)=8, Z(10)=4,\ Z(11)=10,\ Z(12)=8,\ Z(13)=12,\ Z(14)=7,\ Z(15)=5$$
$$Z(16)=31,\ Z(17)=16,\ Z(18)=8,\ Z(19)=18,\ Z(20)=15,\ \cdots$$

这一函数是David Gorski 在文[1]中提出的, 同时他也研究了$Z(n)$的一些初等性质, 获得了$Z(n)$的一系列特殊值的计算公式. 其中部分结果如下:

A) 如果$p > 2$ 是一个素数, 那么对任意正整数α有$Z(p^\alpha) = p^\alpha - 1$;

B) 如果$n = 2^k$, 那么$Z(n) = 2^{k+1} - 1$.

C) 设$p > 2$ 为素数, α为任意正整数. 那么$Z(2p^\alpha) = p^\alpha$, 如果$p^\alpha \equiv 3 \pmod 4$; $Z(2p^\alpha) = p^\alpha - 1$, 如果$p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$.

其它有关伪Smarandache 函数的研究工作可参阅文[2-6], [9-10]. 在文[3]中, Kenichiro Kashihara 建议我们求所有正整数n使得伪Smarandache函数$Z(n)$为n的原根. 关于这一问题, 至今似乎没有研究, 至少我们没有看到相关的论文! 通过数值检验我们发现这样的正整数n虽然很少, 然而是存在的! 正像Kenichiro Kashihara所指出的, $Z(4) = 7$是4的一个原根; $Z(3) = 2$是3的一个原根. 除了这两个正整数外, 是否还有其它正整数n使得$Z(n)$为n的原根? 本文利用初等方法研究了这一问题, 并得到彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

定理 设n是存在原根的任意正整数, 则伪Smarandache 函数$Z(n)$为n的原根当且仅当$n = 2, 3, 4$.

收稿日期: 2005-11-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60472068).
作者简介: 杨明顺(1964-), 副教授, 研究方向: 从事基础数学的教学与研究.

2 定理的证明

这节我们利用初等方法来完成定理的证明. 首先我们介绍一下原根的定义及其它的存在性. 设$n>1$为正整数, a为任意整数且$(a, n)=1$. 则由初等数论中著名的Euler定理可知$a^{\phi(n)}\equiv 1 \pmod n$, 其中$\phi(n)$为Euler函数, 即就是$\phi(n)$表示不超过$n$且与$n$互素的正整数的个数. 因此当$(a, n)$互素时, 至少存在一个正整数$m$使得$a^m\equiv 1 \pmod n$. 设满足同余式$a^m\equiv 1 \pmod n$的最小正整数为$m$. 则当$m=\phi(n)$时, 称$a$为模$n$的原根. 然而, 并非所有正整数$n$都有原根. 事实上关于原根的存在性, 我们有下面的:

引理 设$m>1$为任意正整数, 则模m存在原根当且仅当$m=2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, 其中$p$为奇素数, α为正整数.

证明 参阅文[7]或者文[8]中第6章定理4.

现在我们应用这一引理来完成定理的证明. 显然$Z(2)=3$是2的一个原根; $Z(4)=7$是4的一个原根. 现在考虑$n=p^\alpha$, 其中p为奇素数. 若$Z(n)$是模$n=p^\alpha$的原根, 则由$Z(n)$的定义及性质知$Z(n)=p^\alpha-1$, 所以$p^\alpha-1$为模$n=p^\alpha$的原根! 又由于

$$Z^2(n)=(p^\alpha-1)^2\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

且$p^\alpha-1$为模$n=p^\alpha$的原根, 所以

$$2=\phi\left(p^\alpha\right)=p^{\alpha-1}(p-1)$$

由此式立刻推出$\alpha=1$, $p-1=2$. 既就是$n=2+1=3$. 因此当$n=p^\alpha$ (p为奇素数)时, $Z(n)$为n的原根当且仅当$n=p=3$.

当$n=2p^\alpha$时, 注意到前面列出的$Z(n)$的性质C)我们分两种情况讨论:

(1) 若$p^\alpha\equiv 3 \pmod 4$, 则由$Z(n)$的定义及性质可得$Z(n)=p^\alpha$. 因为$(p^\alpha, 2p^\alpha)=p^\alpha>1$, 所以$Z(n)=p^\alpha$不可能为$n=2p^\alpha$的原根.

(2) 若$p^\alpha\equiv 1 \pmod 4$, 则由$Z(n)$的定义及性质可得$Z(n)=p^\alpha-1$. 因为$(p^\alpha-1, 2p^\alpha)=2>1$, 所以$Z(n)=p^\alpha-1$也不可能为$n=2p^\alpha$的原根.

综合以上结果以及n的原根存在定理我们立刻推出$Z(n)$为n的原根当且仅当$n=2, 3, 4$. 于是完成了定理的证明.

参考文献

[1] David Gorski. The Pseudo Smarandache Function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13:140-149.

[2] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House. 1993.

[3] Kenichiro Kashihara. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[4] Liu Yanni. On the Smarandache pseudo number sequence [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics. 2006, 10(4):42-59.

[5] Lou Yuanbing. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna., 2007, 3(4):48-50.

[6] Zheng Yanni. On the pseudo Smarandache function and its two conjectures [J]. Scientia Magna., 2007, 3(4):50-53.

[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[8] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.

[9] 杜凤英. 关于Smarandache函数$S(n)$的一个猜想[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2):205-208.

[10] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3):351-354.

On a problem of the pseudo Smarandache function

YANG Ming-shun

(Department of Mathematics, Weinan Teacher's College, Weinan 714000, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous pseudo Smarandache function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$. The main purpose of this paper is using the elementary method to find all positive integer n such that $Z(n)$ is a primitive root of n. This problem proposed by Kenichiro Kashihara in his book [3], we solved it completely, and proved that $Z(n)$ is a primitive root of n if and only if $n = 2, 3, 4$.

Keywords: the pseudo Smarandache function, primitive root, elementary method.

2000MSC: 11B83

(上接第429页)

[14] Cheng Hongjun, Liu Wanli, Yang Hanchun. Tow-dimensional Riemann problem for zero-pressure gas dynamics with three constant states [J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 343:127-140.

Two-dimensional Riemann problem for zero-pressure gas dynamics-three J cases

CHENG Hong-jun[1,2], TONG Yan-chun[1], YANG Han-chun[1]

(1. Department of Mathematics, University, Kunming 650091, Yunnan, China;

2. DianChi College, Yunnan University, Kunming 650228, China)

Abstract: The Riemann problem with three initial constants for two dimensional zero-pressure gas dynamics is considered. When the exterior waves only involve 3J, by using characteristic analysis and studying interaction of elementary waves, two kinds of different configurations of solutions are explicitly constructed, one includes a delta-shock wave and the other contains vacuum in a triangle region.

Keywords: two-dimensional zero-pressure gas dynamics, Riemann problem, delta shock wave, generalized Rankine-Hugoniot relation, entropy condition

2000MSC: 35L65, 76N15