DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2008.02.005

第21卷第2期 纺织高校基础科学学报 Vol.21, No.2
2008年6月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES June, 2008

文章编号:1006-8341(2008)02-0151-03

关于伪Smarandache函数的一个方程

关文吉[1,2], 郑亚妮[1,3]

(1. 西北大学 数学系,陕西 西安 710069; 2. 渭南师范学院 数学系,陕西 渭南 714000;
3. 咸阳师范学院 数学系,陕西 咸阳 712000)

摘要: $\forall n \in \mathbf{N}_+$,伪Smarandache无平方因子函数 $Zw(n)$ 定义为最小的正整数 m,满足 $n \mid m^n$. $Z(n)$ 定义为最小的正整数 k,满足 $n \mid (k(k+1))/2$. 用初等方法研究了方程 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) = 0$ 的可解性,并证明了该方程有无穷多个正整数解. 同时给出了不等式 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0$ 和 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0$ 的正整数解.

关键词:伪Smarandache无平方因子函数;伪Smarandache函数;正整数解;不等式
中图分类号:O 156.4 文献标识码:A

1 引言及结论

$\forall n \in \mathbf{N}_+$,伪Smarandache无平方因子函数 $Zw(n)$ 定义为最小的正整数 m,满足 $n \mid m^n$,即 $Zw(n) = \min\{m: m \in \mathbf{N}, n \mid m^n\}$.

关于函数 $Zw(n)$ 的研究是数论中非常重要和有意义的课题,许多学者研究了它的性质[1-6],并得出了有意义的结论,文献[2]证明了 $Zw(n) = \prod_{p \mid n} p$,其中 p 为 n 的素因子. 从这个公式,很容易得到 $Zw(n)$ 的值. 如 $Zw(1) = 1, Zw(2) = 2, Zw(3) = 3, Zw(4) = 2, Zw(5) = 5, Zw(6) = 6, Zw(7) = 7, Zw(8) = 2, Zw(9) = 3, Zw(10) = 10, \cdots$. 很容易看出,如果 n 为一个无平方因子数,则 $Zw(n) = n$;如果 n 为素数 p,则 $Zw(p) = p$.

文献[3]引入了伪Smarandache函数 $Z(n)$. $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $Z(n)$ 定义为最小的正整数 k,满足 $n \mid 1 + 2 + \cdots + k = (k(k+1))/2$. 由此可知 $Z(1) = 1, Z(2) = 3, Z(3) = 2, Z(4) = 7, Z(5) = 4, Z(6) = 3, Z(7) = 6, Z(8) = 15, Z(9) = 8, Z(10) = 4, \cdots$.

文献[4]提出了关于复合函数 $Zw(Z(n))$ 和 $Z(Zw(n))$ 的3个问题,即

问题1 求解方程

$$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) = 0. \tag{1}$$

问题2 求解不等式

$$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0.$$

问题3 求解不等式

$$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0.$$

本文利用初等方法研究方程 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) = 0$ 的可解性,并证明了该方程有无穷多个正整数解. 同时证明了不等式 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0$ 和 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0$ 有正整数解. 即就

收稿日期:2007-12-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
通讯作者:关文吉(1978-),女,陕西省大荔县人,渭南师范学院讲师. E-mail: guanwenji_2003@yahoo.com.cn

是证明了下面的：

定理1　方程 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) = 0$ 有无穷多个正整数解.

推论1　不等式 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0$ 有无穷多个正整数解.

推论2　不等式 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0$ 有无穷多个正整数解.

2　引　理

引理1[5]　对于任意的素数 $p > 2$, $Z(p) = p - 1$.

引理2[5]　若 $n = p^m$, 其中 p 为大于2的素数, $m \in \mathbf{N}$, 则 $Z(n) = n - 1$.

引理3[5]　若 $n = 2^m$, 其中 $m \in \mathbf{N}$, 则 $Z(n) = 2n - 1$.

引理4[5]　若 $n \in \mathbf{N}$, 且 $n/2$ 为比2大的奇数, 则 $Z(n) = \begin{cases} n/2 - 1, & \text{若 } 4 \mid (n/2 - 1), \\ n/2, & \text{若 } 4 \mid (n/2 + 1). \end{cases}$

引理5　若 $n \in \mathbf{N}$, 且 $n/3$ 为比3大的素数, 则 $Z(n) = \begin{cases} n/3 - 1, & \text{若 } 3 \mid (n/3 - 1), \\ n/3, & \text{若 } 3 \mid (n/3 + 1). \end{cases}$

3　定理和推论的证明

3.1　定理的证明

显然当 $n = 1$ 时, $Zw(Z(1)) - Z(Zw(1)) = 0$, 以下讨论 $n > 1$ 时的情形(以下 p 均为素数).

(1)　当 $n = p > 2$ 时. 由引理1知 $Zw(Z(n)) = Zw(Z(p)) = Zw(p - 1)$, $Z(Zw(n)) = Z(Zw(p)) = Z(p) = p - 1$. 若方程(1)成立, 则

$$Zw(p - 1) = p - 1. \tag{2}$$

显然当 $p - 1$ 当为无平方因子数时, 式(2)成立. 所以 $n = p > 2$ 且 $p - 1$ 为无平方因子数为方程(1)的解.

(2)　当 $n = p^m$, $p > 2$, $m \in \mathbf{N}$ 且 $m > 1$ 时. 由引理2知 $Zw(Z(n)) = Zw(Z(p^m)) = Zw(p^m - 1)$,

$$Z(Zw(n)) = Z(Zw(p^m)) = Z(p) = p - 1.$$

若方程(1)成立, 则 $Zw(p^m - 1) = p - 1$. 解得 $p = 3$, $m = 2$ 即 $n = 9$ 为方程(1)的解.

(3)　当 $n = 2^m$, $m \in \mathbf{N}$. 由引理3知

$$Zw(Z(n)) = Zw(Z(2^m)) = Zw(2^{m+1} - 1),$$

$Z(Zw(n)) = Z(Zw(2^m)) = Z(2) = 3$.

若方程(1)成立, 则 $Zw(2^{m+1} - 1) = 3$. 解得 $m = 1$, $n = 2$ 为方程(1)的解.

(4)　当 $n = 2p_1p_2\cdots p_k$, $p_i > 2$ $(i = 1, 2\cdots k)$ 为不同的素数时, 由引理4知 $Z(n) = \begin{cases} p_1p_2\cdots p_k - 1, & \text{若 } 4 \mid p_1p_2\cdots p_k - 1, \\ p_1p_2\cdots p_k, & \text{若 } 4 \mid p_1p_2\cdots p_k + 1. \end{cases}$ 故 $Zw(Z(n)) = \begin{cases} Zw(p_1p_2\cdots p_k - 1), & \text{若 } 4 \mid p_1p_2\cdots p_k - 1, \\ p_1p_2\cdots p_k, & \text{若 } 4 \mid p_1p_2\cdots p_k + 1. \end{cases}$

$$Z(Zw(n)) = Z(2p_1p_2\cdots p_k) = \begin{cases} p_1p_2\cdots p_k - 1, & \text{若 } 4 \mid p_1p_2\cdots p_k - 1, \\ p_1p_2\cdots p_k, & \text{若 } 4 \mid p_1p_2\cdots p_k + 1. \end{cases}$$

所以当 $n = 2p_1p_2\cdots p_k$ 且 $4 \mid p_1p_2\cdots p_k + 1$ 时, 方程(1)成立.

(5)　当 $n = 3p$, $p \geqslant 5$ 时. 由引理5知 $Z(n) = Z(3p) = \begin{cases} p - 1, & \text{若 } 3 \mid p - 1, \\ p, & \text{若 } 3 \mid p + 1. \end{cases}$ $Zw(n) = Zw(3p) = 3p$. 故 $Zw(Z(n)) = \begin{cases} Zw(p - 1), & \text{若 } 3 \mid p - 1, \\ Zw(p) = p, & \text{若 } 3 \mid p + 1. \end{cases}$ $Z(Zw(n)) = Z(3p) = \begin{cases} p - 1, & \text{若 } 3 \mid p - 1, \\ p, & \text{若 } 3 \mid p + 1. \end{cases}$ 所以当 $n = 3p$, $p \geqslant 5$ 且 $3 \mid p + 1$ 时, 方程(1)成立. 显然存在无穷多个素数 p 使得 $3 \mid p + 1$, 因而方程(1)有无穷多个正整数解.

综合以上1 ~ 5, 得到方程(1)有无穷多个正整数解. 这就完成了定理1的证明.

3.2　推论1和推论2的证明

(1)　由定理1证明中的第1种情况知, 当 $n = p > 2$ 且 $p - 1$ 含平方因子数时, $Zw(Z(n)) = Zw(p - 1) < p - 1 = Z(Zw(n))$, 所以 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0$.

由定理 1 证明中的第 4 种情况知, 当 $n = 2p_1p_2\cdots p_k$ 且 $4 \mid p_1p_2\cdots p_k - 1$ 时, 即 $p_1p_2\cdots p_k - 1 = 2^2 t$, $t \in \mathbf{N}$,

$$Zw(Z(n)) = Zw(p_1p_2\cdots p_k - 1) = Zw(2^2 t) < 2^2 t.$$

而此时 $Z(Zw(n)) = Z(Zw(2p_1p_2\cdots p_k)) = 2^2 t$. 所以 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0$. 这就证明了推论 1.

(2)　由定理 1 证明中的第 3 种情况知, 当 $n = 2^m$ 且 $m > 1$ 时,

$$Zw(Z(n)) = Zw(Z(2^m)) = Zw(2^{m+1} - 1) > 3,$$

而此时 $Z(Zw(n)) = Z(Zw(2^m)) = Z(2) = 3$. 所以 $Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0$. 这就证明了推论 2.

参考文献:

[1] 路玉麟. 一个包含 Smarandache 函数的方程[J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(2): 253-254.

[2] LE Maohua. On the Pseudo-Smarandache-Squarefree function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002(13): 229-236.

[3] KASHIHARA K. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. Vail USA: Erhus Univ Press, 1996.

[4] RUSSO Felice. A set of new Smarandache function, sequences and conjectures in number theory[M]. Lupton USA: American Research Press, 2000.

[5] GORSKI David. The Pseudo-Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002(13): 140-149.

[6] MAJUMDAR A A K. A note on the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006(3): 1-25.

An equation concerning the Pseudo-Smarandache-Squarefree function

GUAN Wen-ji[1,2], *ZHENG Ya-ni*[1,3]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China;
2. Department of Mathematics, Weinan Teachers University, Weinan, Shaanxi 714000, China;
3. Department of Mathematics, Xianyang Teachers University, Xianyang, Shaanxi 712000, China)

Abstract: For any positive integer n, the Pseudo-Smarandache-Squarefree function $Zw(n)$ was defined as the smallest positive integer m such that $n \mid m^n$. $Z(n)$ was defined as the smallest positive integer k such that $n \mid (k(k+1))/2$. Using the elementary methods, it was studied that the solutions of the equation

$$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) = 0,$$

and it was proved that the equation has infinite positive integer solutions. At the same time, it was given that the solutions of the inequalities

$$Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) < 0 \text{ and } Zw(Z(n)) - Z(Zw(n)) > 0.$$

Key words: Pseudo-Smarandache-Squarefree function; Pseudo Smarandache function; integer solution; inequalities

编辑、校对: 黄燕萍