第 37卷第 8期　　数学的实践与认识　　Vol. 37 No. 8
2007年 4月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　April, 2007

关于一些新的 Smarandache数列

潘晓玮，　刘燕妮

(西北大学 数学系，西安　710069)

摘要:　主要目的是利用初等方法研究 LCM 序列和 SLOS数列的性质，并给出一个包含这两个数列的恒等式及渐近公式．结论：证明了

$$\frac{L(2n)}{L(n)}=\frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)}\text{ 和 }\ln(L(n))=n+O\left[n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right].$$

关键词:　Smarandache LCM 数列；Smarandache SLOS数列；恒等式

1　引言及结论

对任意正整数 n，我们定义 $L(n)$ 是自然数 1到 n的最小公倍数(LCM)，即 $L(n)=[1,2,\cdots,n]$. Smarandache LCM 数列由 $SLS\rightarrow L(1),L(2),\cdots,L(n),\cdots$ 来定义．我们再定义另一个新的 Smarandache SLOS序列，被称为是 Smarandache LCM 奇数序列．对任意的正整数 n，我们有 $SLOS(2n-1)=[1,3,5,\cdots,2n-1]$，这一数列是 $SLOS\rightarrow 1,3,15,105,415,4565,\cdots$. Smarandache LCM 偶数数列(SLES)也可以用相同的方法定义．即 $SLES\rightarrow 2,4,12,24,240,\cdots$．如果令 T_n 表示这些数列的第 n项，则很容易看出

$$T_{2n+1}(SLES)=2^n T_n(SLOS).$$

显然 $L(n)$ 和 $SLOS(2n-1)$ 是两个新的 Smarandache函数．关于这两个函数的性质，很少有人研究，但是它们却非常重要．因为它可以揭示最小公倍数的性质．本文的主要目的是通过对 $L(n)$ 与 $SLOS(2n-1)$ 之间关系的研究，得出一个有趣的恒等式及渐近公式，从而推出 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^r}$ 的收敛性．即就是证明以下两个结论:

定理 1　对任意给定的正整数 n，我们有恒等式

$$\frac{L(2n)}{L(n)}=\frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)},$$

其中 $[x]$表示不超过 x 的最大整数．

定理 2　对任意给定的正整数 n，我们有渐近公式

$$\ln(L(n))=n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 c为一正常数．

由定理 2我们立刻得到下面的:

收稿日期：2006-05-09

基金项目：国家自然科学基金(10671155)

推论 无穷级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{T}}$$

当 $T>1$时收敛,当 $T\leq 1$时发散.

2 定理的证明

为了完成定理的证明,我们需要下面两个简单引理,

引理 **1** 如果 a,b是两个正整数,则 a与 b的最小公倍数 $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$,其中 (a,b)表示 a和 b的最大公约数.特别地,当 $(a,b)=1$时, $[a,b]=ab$.

引理 1的证明可参见文献 [1].

引理 **2** 对 $x>0$, 我们有渐近公式

$$\theta(x)=\sum_{p\leq x}\ln p=x+O\left(x\exp\left(\frac{-c(\ln x)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{5}}}\right)\right),$$

其中 c是一个正常数.

引理 2的证明可参见文献 [3].

现在我们来完成定理的证明,首先证明定理 1.由 $L(n)$与 $SLOS(2n-1)$的定义可得

$$\begin{aligned}L(2n)&=[1,2,\cdots,2n]=[[1,3,\cdots,2n-1],[2,4,\cdots,2n]]\\&=[[1,3,\cdots,2n-1],2[1,2,\cdots,n]]=[SLOS(2n-1),2L(n)]\\&=\frac{2\cdot L(n)\cdot SLOS(2n-1)}{(2L(n),SLOS(2n-1))}=\frac{2\cdot L(n)\cdot SLOS(2n-1)}{(L(n),SLOS(2n-1))}\end{aligned}$$

或

$$\frac{L(2n)}{L(n)}=\frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{(L(n),SLOS(2n-1))}. \tag{1}$$

现在我们只需证明

$$(L(n),SLOS(2n-1))=SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right). \tag{2}$$

对任意正整数 T_i,设 $T_i=2^{T_i}t_i$, (其中 i是一非负整数, t_i是一奇数).

则由最小公倍数的定义有

$$L(n)=[1,2\cdots,n]=[2^{T_1}t_1,2^{T_2}t_2,\cdots,2^{T_n}t_n]=2^{T}\left[1,3,5,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right],$$

这里 $T=\max\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}$. 于是

$$\begin{aligned}(L(n),SLOS(2n-1))&=\left(2^{T}\left[1,3,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right],[1,3,\cdots,2n-1]\right)\\&=\left(\left[1,3,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right],[1,3,\cdots,2n-1]\right)\\&=\left[1,3,\cdots,2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right]=SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right),\end{aligned}$$

即 (2)成立.再结合 (1)与 (2),我们立即可得恒等式

$$\frac{L(2n)}{L(n)}=\frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)}.$$

于是完成了定理 1的证明.

下面我们来证明定理 2.令

$$L(n)=[1,2,\cdots,n]=p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_n^{\alpha_n},$$

其中 p_i 是 $L(n)$ 不同的素因子, α_i 是所有 $1,2,3,\cdots,n$ 标准分解式中 p_i 的最高次幂.因此

$$\ln(L(n))=\ln(p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_n^{\alpha_n})=\sum_{p\leq n}\alpha(p)\ln p=\sum_{p\leq n}\ln p+\sum_{p\leq n}(\alpha(p)-1)\ln p$$

$$=\theta(n)+\sum_{p\leq\sqrt{n}}(\alpha(p)-1)\ln p+\sum_{\sqrt{n}\leq p\leq n}(\alpha(p)-1)\ln p,$$

当 $p_i>\sqrt{n}$, 我们有 $\alpha_i=1$. 否则若 $\alpha_i\geq 2$, 则 $p_i^2>n$, 从而 $p_i^{\alpha_i}>n$. 这与 $p<n$ 矛盾.即 $\sum_{\sqrt{n}\leq p\leq n}(\alpha(p)-1)\ln p=0$. 所以

$$\ln(L(n))=\theta(n)+\sum_{p\leq n}(\alpha(p)-1)\ln p.$$

又 $p_i^{\alpha_i}<n$, 因此 $\alpha_i<\ln n$, $p<\ln n$, 再由引理 2,即可得

$$\ln(L(n))=\theta(n)+O\left(\ln^2 n\sum_{p\leq\sqrt{n}}1\right)=\theta(n)+O\left(\ln^2 n\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)$$

$$=n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)+O(\sqrt{n}\ln n)$$

$$=n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).$$

这样就完成了定理 2的证明.

最后我们来证明无穷级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{\alpha}}$$

当 $\alpha>1$时收敛,当 $\alpha\leq 1$时发散.

由定理 2,可得

$$[\ln(L(n))]^{\alpha}=\left[n+O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha}=n^{\alpha}\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha},$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{\alpha}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha}}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha}\left[1+O\left(\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right)\right]^{\alpha}}=1,$$

而调和级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$时收敛,当 $\alpha\leq 1$时发散.故由正项无穷级数的比较法则知当 $\alpha>1$时 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[\ln(L(n))]^{\alpha}}$ 也收敛,而当 $\alpha\leq 1$时该级数发散.于是完成了推论的证明.

致谢 作者对导师张文鹏教授的悉心指导表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] Pan C D, Pan C B. Elementary Number Theory[M]. Beijing: Beijing University Press, 1992, 35. (In Chinese)

[2] Amarnth Murthy. Generalized Partitions and New Ideas On Number Theory and Smarandache Sequences[M]. Hexis, 2005. 36- 38.

[3] Pan C D, Pan C B. Foundation of Analitic Number Theory[M]. Beijing: Science Press, 1999, 202. (In Chinese)

Some New Smarandache Sequences

PAN Xiao-wei, LIU Yan-ni

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710069, China)

Abstract Objective: To study the properties of LCM sequence and SLOS sequence. Methods: Using the elementary method. Results: Tive an identity and asymptotic formula involving these two sequences. Conclusions: Proved that

$$\frac{L(2n)}{L(n)} = \frac{2\cdot SLOS(2n-1)}{SLOS\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)}$$

and

$$\ln(L(n)) = n + O\left(n\exp\left(\frac{-c(\ln n)^{\frac{3}{5}}}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{5}}}\right)\right).$$

Keywords smarandache LCM sequence; smarandache SLOS sequence; Identity