DOI:10.15886/j.cnki.hdxbzkb.2014.04.002



文章编号:1004－1729(2014)04－0302－02

# 关于一个 Smarandache 数列的研究

王明军

(渭南师范学院 数学与信息科学学院,陕西 渭南 714099)

**摘　要:** 对于任意的正整数 $n$,设 $a(n)$ 表示将每个自然数 $n$ 重复 $n$ 次得到的数列. 给出该数列的一个通项公式,然后利用初等方法研究了该数列与 Euler 函数的均值,以及与 $\delta_k(n)$ 的复合函数的均值,并给出其渐近公式.

**关键词:** 复合函数; 均值; 渐近公式

**中图分类号:** O 156. 4　　　**文献标志码:** A

SMARANDACHE 教授在《Proposed Problems of Mathematics》[1] 一书中,介绍了一个数列 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,…,对于每个自然数 $n$ 重复 $n$ 次,此数论函数看起来很有规律;同时给出了这个数列的一个通项公式

$$\text{对于 } r\geqslant 1,\text{有 } a_{r(r+1)/2-k}=r,(0\leqslant k\leqslant r-1).$$

关于此数列,尚未见到其他相关的结论. 为了能更好地研究该数列的性质,将该数列的通项公式表示为

$$r(r-1)/2<n\leqslant r(r+1)/2 \text{ 时},a(n)=r,\text{其中 } r \text{ 为正整数}.$$

关于数论函数的均值和混合均值的研究有许多很好的结论和研究方法,文献[2－3]给出五边形补数的均值,文献[4－8]给出与 $e_p(n)$ 和其他函数有关的一些混合均值. 笔者在上述通项公式的基础上,利用初等方法研究了该数列与 Euler 函数的均值以及与函数 $\delta_k(n)$ 的复合函数的均值,并给出其渐近公式,即证明了以下定理.

**定理1**　对于任意给定的正实数 $x\geqslant 1$,$\{a(n)\}$ 是将每个正整数 $n$ 重复 $n$ 次得到的数列,$\varphi(n)$ 表示 Euler 函数,则有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(a(n))=\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}x^{3/2}\ln x+\frac{2\sqrt{2}\times\ln 2}{\pi^2}x^{3/2}+O(x\ln x).$$

**定理2**　对任意实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a(n))=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O(x^{5/4+\varepsilon}),$$

其中 $\delta_k(n)$ 定义为 $\delta_k(n)=\begin{cases}\max\{d\in\mathbf{N}\mid d\mid n,(d,k)=1\},n\neq 0\\0,n=0\end{cases}$.

## 1　引理

为了完成定理的证明,需要下面的引理.

**引理1**　对于任意的实数 $x\geqslant 1$,设 $M(M-1)/2<x\leqslant M(M+1)/2$,则有渐近公式

$$M=\sqrt{2x}+O(1).$$

**证明**　对于任意的实数 $x\geqslant 1$,设 $M(M-1)/2<x\leqslant M(M+1)/2$,由不等式 $x\leqslant M(M+1)/2$,解得 $M\geqslant(-1+\sqrt{1+8x})/2$ 或者 $M\leqslant(-1-\sqrt{1+8x})/2$. 由不等式 $M(M-1)/2<x$,解得 $(1-\sqrt{1+8x})/2<$

收稿日期: 2014－05－30
基金项目: 陕西省科技厅自然科学基金(2013JM10106);陕西省扶持学科数学学科基金资助(14SXZD018)
作者简介: 王明军(1972－),男,陕西合阳人,副教授.

$M<(1+\sqrt{1+8x})/2$，由此可得 $(-1+\sqrt{1+8x})/2\leqslant M<(1+\sqrt{1+8x})/2$，即 $M=\sqrt{2x}+O(1)$.

**引理 2**　设 $\varphi(n)$ 表示 Euler 函数，$M\geqslant 1$ 为任一正整数，则有渐近公式

$$\sum_{t\leqslant M}t\varphi(t)=\frac{2}{\pi^2}M^3\ln M+O(M^2\ln M).$$

**证明**　令 $A(M)=\sum_{r\leqslant M}\varphi(r)$，由 Abel 恒等式[9] 可得到

$$\sum_{t\leqslant M}t\varphi(t)=A(M)M-\int_1^M A(t)\,\mathrm{d}t=M\left(\frac{3}{\pi^2}M^2+O(M\ln M)\right)-\int_1^M\left(\frac{3}{\pi^2}t^2+O(t\ln t)\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi^2}M^3\ln M+O(M^2\ln M)).$$

**引理 3**　对于任意正数 $x\geqslant 1$ 及正整数 $k$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)=\frac{x^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}+O(x^{3/2+\varepsilon}),$$

其中，$\delta_k(n)=\begin{cases}\max\{d\in\mathbf{N}\mid d\mid n,(d,k)=1\},n\neq 0\\ 0,n=0\end{cases}$，$\prod_{p|k}$ 表示对所有满足 $p|k$ 的素因子 $p$ 求积，$\varepsilon$ 是任意给定的正数.

**证明**　参阅文献[10].

## 2　定理的证明

首先证明定理 1.

对于任意给定的正数 $x\geqslant 1$，必存在正整数 $M$，满足 $M(M-1)/2<x\leqslant M(M+1)/2$. 由 $a(n)$ 的定义及引理 1 和引理 2 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varphi(a(n))&=\sum_{r=1}^{M-1}\sum_{r(r-1)/2<n\leqslant r(r+1)/2}\varphi(a(n))+\sum_{M(M-1)/2<n\leqslant x}\varphi(a(n))=\\&\sum_{r=0}^{M-1}(r(r+1)/2-r(r-1)/2)\varphi(r)+\sum_{M(M-1)/2<n\leqslant x}\varphi(M)=\\&\sum_{r=1}^{M}r\varphi(r)+O(M^{1+\varepsilon})=\frac{2}{\pi^2}M^3\ln M+O(M^2\ln M))=\\&\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}x^{3/2}\ln x+\frac{2\sqrt{2}\times\ln 2}{\pi^2}x^{3/2}+O(x\ln x)\end{aligned}$$

定理 2 的证明.

对于任意实数 $x\geqslant 1$，$M$ 是一个确定的正整数，满足 $M(M-1)/2<x\leqslant M(M+1)/2$，根据 $a(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a(n))&=\sum_{t=0}^{M-1}\sum_{t(t-1)/2<n\leqslant t(t+1)/2}\delta_k(a(n))+\sum_{M(M-1)/2<n\leqslant x}\delta_k(a(n))=\\&\sum_{t=0}^{M-1}(t(t+1)/2)-t(t-1)/2)\delta_k(t)+\sum_{M(M-1)/2<n\leqslant x}\delta_k(M)=\\&\sum_{t=1}^{M}t\delta_k(t)+O(\sum_{M(M-1)/2<n\leqslant M(M+1)/2}\delta_k(M))=\sum_{t=1}^{M}t\delta_k(t)+O(M\delta_k(M)).\end{aligned}$$

设 $A(y)=\sum_{t\leqslant y}\delta_k(t)$，根据 Abel 恒等式以及引理 3，则有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{M}t\delta_k(t)&=MA(M)-\int_1^M A(y)\,\mathrm{d}y=M\left(\frac{M^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}+O(M^{3/2+\varepsilon})\right)-\int_1^M\left(\frac{y^2}{2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}+O(y^{3/2+\varepsilon})\right)\mathrm{d}y=\\&\frac{M^3}{3}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}+O(M^{5/2+\varepsilon})-\frac{M^3}{6}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}=\frac{M^3}{3}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}+O(M^{5/2+\varepsilon}).\end{aligned}$$

因此，由引理 1 及上式可以得到

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(a(n))=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\prod_{p|k}\frac{p}{p+1}+O(x^{5/4+\varepsilon}).$$

这样就完成了定理的证明.

按照相同的推理方法，还可以得出该数列与其他数论函数的均值，例如：设 $p$ 为一个素数，$e_p(n)$ 表示整除正整数 $n$ 的 $p$ 的最大幂指数，则对任意实数 $x\geqslant 1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(a(n))=\frac{1}{p-1}x+O(x^{1/2}\ln^2 x).$$

( 下转第 306 页)

[13] 莫明忠,潘玉美,吴建生. 齿轮图 $\overline{W}_n$ 的 [r,s,t] -着色 [J]. 洛阳师范学院学报,2012,31(2):26-28.
[14] 张东翰,朱白. 路的 $D(3)$ -点可区别的全染色 [J]. 商洛学院学报,2014,28(2):11-12.
[15] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. New York: The Macmillan Press Ltd,1976.
[16] REINHARD D. Graph Theory [M]. New York: Springer-Verlag,1997.

# Some Colorings of the Gear Graph

ZHANG Donghan, ZHAO Jian
(College of Mathematics and Computer Applications, ShangLuo University, Shang luo, Shan Xi 726000)

**Abstract:** The exhaustion method and the combination analytic method were used to discuss the adjacent strong edge coloring and the adjacent vertex distinguishing total coloring of the gear graph. The adjacent strong edge chromatic number and the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of the gear graph were obtained by constructing specific coloring.

**Key words:** gear graph; adjacent strong edge coloring; adjacent vertex distinguishing total coloring

(上接第 303 页)

## 参考文献:

[1] SMARANDACHE. F Proposed Problems of Mathematics [M]. U. S. M: Chisinău, 2010: 69.
[2] 杨存典. 关于五边形数的补数及其渐近性质 [J]. 西安工业学院学报,2006,26(3):287-290.
[3] 王明军. 关于正整数的五边形数补数的性质 [J]. 天津师范大学学报,2009,29(3):16-17.
[4] 祁兰. 关于 2 个算术函数的一个混合均值 [J]. 海南大学学报: 自然科学版,2014,32(1):21-22.
[5] LV Chuan. A Number Theoretic Function and its Mean Value [M]. Hexis: Research on Smarandache Problems in Number Theory,2004: 33-36.
[6] 屈芝莲. 关于 Smarandache 指数函数 $e_p(n)$ 与除数和函数 $\delta_t(n)$ 的混合均值 [J]. 海南大学学报: 自然科学版,2011,29(1):4-7.
[7] LI Chao YANG Cundian. On the Additive Hexagon Numbers Complements [M]. Hexis: Research on Smarandache Problems in Number Theory,2005,71-74.
[8] SUBRAMANIAM K B. A generalization of triangular numbers [J]. Internat J Math Ed Sci Tech, 1992, 23: 790-793.
[9] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag,1976: 77-78.
[10] YI Yuan. On the triangle numbers complement and its asymptotic properties [J]. Journal of Shangluo Teachers College ,2005, 19 (2): 3-5.

# A Smarandache Sequence

WANG Mingjun
(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan Shannxi, 714099)

**Abstract:** For any positive integer $n$, let $a(n)$ denote the natural sequence where each number $n$ is repeated $n$ times. After the general term formula was proposed, the elementary method was used to study the asymptotic properties of this sequence and two hybrid function, and the asymptotic formula was obtained.

**Key words:** hybrid function; mean value; asymptotic formula