DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2012.02.005

关于 Smarandache 素数可加补函数

郭艳春，任刚练

（咸阳师范学院 数学与信息科学学院，陕西 咸阳 712000）

摘 要：对任意的正整数 n，Smarandache 素数可加补函数 $SPAC(n)$ 定义为最小的正整数 k，使得 $n+k$ 是一个素数. 文章利用初等方法研究了 Smarandache 素数可加补函数 $SPAC(n)$ 的均值性质，并给出一个有趣的渐近公式.

关键词：Smarandache 素数可加补函数；均值；渐近公式

中图分类号：O156.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1009—5128(2012)02—0014—03

收稿日期：2011—05—22

基金项目：陕西省教育厅科研资助项目(09JK803)；咸阳师范学院专项科研基金资助项目(09XSYK303)

作者简介：郭艳春(1976—)，女，陕西横山人，咸阳师范学院数学与信息科学学院讲师，理学硕士. 研究方向：数论.

0 引言及结论

对任意的正整数 n，著名的 Smarandache 素数可加补函数 $SPAC(n)$ 定义为最小的非负整数 k，使得 $n+k$ 为素数. 该数列的前几项为：

1，0，0，1，0，1，0，3，2，1，0，1，0，3，2，1，0，1，0，3，2，1，0，5，4，3，2，1，0，…

著名教授 F. Smarandache 建议我们研究序列 $\{SPAC(n)\}$ 的性质. 关于这一问题，有学者已作过研究，并获得了一些有趣的结论. 例如，郭艳春在文献[1]中证明了：

存在任意大的正整数 k，使得

$$k, k-1, k-2, k-3, \cdots, 2, 1, 0$$

包含于序列 $\{SPAC(n)\}$.

郭艳春在文献[2]中研究了均值 $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} SPAC(a)$，并证明了：

对任意的正整数 n，有估计式

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} SPAC(a) \geqslant \frac{1}{2}\ln n + O(1).$$

这一研究解决了 Kenichiro Kashihara 教授在文献[3]中提出的对任意大的正整数 k，均值 $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} SPAC(a)$ 发散的猜想.

本文的主要目的是利用初等方法研究关于著名的 Smarandache 素数可加补函数 $SPAC(n)$ 的均值分布性质，并给出一个有趣的渐近公式. 即证明下面的结论：

定理　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(n + SPAC(n)) = \frac{1}{2}x^2 + O(x^{\frac{19}{12}}).$$

1 定理证明

为了完成定理的证明，需要引入以下引理：

引理 1　设 x 为任意大的正数，则一定存在素数 p，有

$$x < p \leqslant x + x^{\frac{7}{12}}$$

成立.

证明参阅文献 [4].

引理 2　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{p_{i+1}\leqslant x}(p_{i+1}-p_i)^2=x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}.$$

其中 p_i 表示第 i 个素数，ε 是任意给定的正数.

证明参阅文献 [5] 和 [6].

下面利用引理来证明定理.

对任意实数 $x>1$，设 $2=p_1<p_2<p_3<\cdots<p_m\leqslant x$ 表示不超过 x 的所有素数，则有等式

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}(n+SPAC(n)) &= [1+SPAC(1)]+[2+SPAC(2)]+\\ &\quad \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{p_i<n\leqslant p_{i+1}}[n+SPAC(n)]+\sum_{p_m<n\leqslant x}[n+SPAC(n)]\\ &=2+2+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{p_i<n\leqslant p_{i+1}}p_{i+1}+\sum_{p_m<n\leqslant x}p_{m+1}\\ &=\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}-p_i)\cdot p_{i+1}+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\\ &=\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}^2-p_ip_{i+1})+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\\ &=\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{1}{2}(p_{i+1}-p_i)^2+\frac{1}{2}({p_{i+1}}^2-{p_i}^2)\right]+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}-p_i)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}({p_{i+1}}^2-{p_i}^2)+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}(n+SPAC(n)) &= [1+SPAC(1)]+[2+SPAC(2)]+\\ &\quad \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{p_i<n\leqslant p_{i+1}}[n+SPAC(n)]+\sum_{p_m<n\leqslant x}[n+SPAC(n)]\\ &=2+2+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{p_i<n\leqslant p_{i+1}}p_{i+1}+\sum_{p_m<n\leqslant x}p_{m+1}\\ &=\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}-p_i)\cdot p_{i+1}+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\\ &=\sum_{i=1}^{m-1}({p_{i+1}}^2-p_ip_{i+1})+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{i=1}^{m-1}=\left[\frac{1}{2}(p_{i+1}-p_i)^2+\frac{1}{2}({p_{i+1}}^2-{p_i}^2)\right]+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}-p_i)^2+\frac{1}{2}({p_m}^2-4)+O((x-p_m)\cdot p_{m+1})\end{aligned}\tag{1}$$

由引理 1，有

$$x-p_m=O(x^{\frac{7}{12}})\tag{2}$$

和

$$p_{m+1}=x+O(x^{\frac{7}{12}}).$$

从而有估计式

$$(x-p_m)\cdot p_{m+1}=O(x^{\frac{19}{12}}).\tag{3}$$

由式(1)，(2)，(3)和引理 2，立即可得渐近公式

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}(n+SPAC(n)) &=\frac{1}{2}\{[x+O(x^{\frac{7}{12}})]^2-4\}+\frac{1}{2}\cdot O(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon})+O(x^{\frac{19}{12}})\\ &=\frac{1}{2}x^2+O(x^{\frac{19}{12}}).\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明.

参考文献:

[1] GUO Yan-chun. About Smarandache prime additive complement [J]. Scientia Magna, 2007, (3): 108 - 109.

[2] 郭艳春, 路玉麟. 关于 Smarandache 素数可加补数列 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(1): 128 - 130.

[3] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[4] M. N. Huxley. The distribution of prime numbers [M]. Oxfors: Oxford University Press, 1972.

[5] D. R. Heath-Brown. The differences between consecutive primes [J]. Journal of London Math. Soc., 1978, 18(2): 7 - 13.

【责任编辑　牛怀岗】

On the Smarandache Prime Additive Complement

GUO Yan-chun, REN Gang-lian

(School of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China)

Abstract: For any positive integer, the Smarandache prime additive complement function is defined as the smallest integer such that is a prime. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the mean value distribution properties of and give an interesting asymptotic formula for it.

Key words: Smarandache prime additive complement; mean value; asymptotic formul

(上接第 10 页)

参考文献:

[1] 李海龙, 杨倩丽. 关于进制及其有关计数函数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2002, 18(1): 13 - 15.

[2] 杨倩丽, 李海龙. 关于进制数字之和函数均值的计算 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2002, 32(4): 361 - 365.

[3] LI Hai-long. On Third Power Mean Values computation of Digital sum Function in Base [J]. Smarandache Noflons Journal, 2004, 14(1): 348 - 351.

[4] 张福玲. 关于进制数字之和函数四次均值的计算 [J]. 西北大学学报(自然科学网络版), 2008, 6(1): 1 - 5.

【责任编辑　牛怀岗】

Base n Digital Sum Function and Its pth-power Mean Value

YANG Qian-li

(Institute of Number Theory, Weinan Normal University, Weinan 714000, China)

Abstract: This paper was mainly resolved the pth-power mean value computation problem of the base n digital sum function. The element methods of recursion, induction, guessed and mathematical induction were used. And it reached the pth-power mean value computing formula of digital sum function in the base n, which made the problem of the pth-power mean value of the base n digital sum function resolved thoroughly.

Key words: base n; function of digital sum; mean value