DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2007.05.018
2007年9月 渭南师范学院学报 Sept. 2007
第22卷 第5期 Journal of Weinan Teachers University Vol.22 No.5

关于Smarandache函数的两个结果

陈 斌[1,2]

(1渭南师范学院 数学系,陕西 渭南 714000;2西北大学 数学系,西安 710069)

摘 要:利用初等数论的方法研究了Smarandache双倍因子函数,推导出了其两个重要结果.

关键词:Smarandache;双倍因子函数;奇素数;整数

中图分类号:O156 文献标志码:A 文章编号:1009-5128(2007)05-0030-02

收稿日期:2007-01-18

基金项目:渭南师范学院科研基金资助项目(05JK189)

作者简介:陈斌(1979-),男,陕西咸阳人,渭南师范学院数学系教师,西北大学硕士研究生.

0 引言及主要结论

首先定义F. Smarandache教授发现的Smarandache函数,并从Smarandache函数出发,作者利用初等数论的方法推导出关于Smarandache双倍因子函数的两个结论:

对于Smarandache双倍因子函数,我们记为 $Sdf(p)=\{m\mid p\mid m!!\}$,其中

$$m!!=\begin{cases}24\cdots m & \text{if } 2\mid m\\ 13\cdots m & \text{if } 2\nmid m\end{cases}$$

定理1 如果 $2\nmid n$,且 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$,$p_1,p_2,\cdots p_k$ 是不同的奇素数. $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是正整数,则

$$Sdf(n)=\max(Sdf(p_1^{a_1}),Sdf(p_2^{a_2}),\cdots,Sdf(p_k^{a_k})). \tag{1}$$

定理2 如果 $2\mid n$,且 $n=2^a n_1$. 其中 a,n_1 是正整数,则

$$Sdf(n)\le\max(Sdf(2^a),2Sdf(n_1)). \tag{2}$$

1 引理及其证明

为了证明定理,首引入两个引理:

引理1 对于任意的数 p,都有 $Sdf(p)=p$ (3)

引理2 对于任意的奇素数 p,a 为正整数,记 $N(p^a)=\{n\mid n=Sdf(p^k)\nmid p^a$ 的个数,$k=1,2,3\cdots\}$,当 $Sdf(p^a)\mid p^a$ 时,存在整数 r,且 $r=\min\{r\mid 1+2+3+\cdots r\ge a-N(p^a)\}$,$Sdf(p^a)=p^r$ (4)

引理1证明:因为对于任意的奇素数 p,都有 $Sdf(p)=\min\{m\mid p\mid m!!\}$,在此 $m!!=1\times3\times5\times\cdots\times m$,又 $p=1\times p$,换句话说,p 的因子只有1与 p,所以只有当 $m=p$ 时,才有 $\min\{p\mid p\mid p!!\}$,即 $Sdf(p)=p$. (5)

又 $Sdf(2)=2$ (6)

综合(5)和(6),可得到当 p 为素数时,$Sdf(p)=p$.

引理2证明: 在Smarandache函数中,$p,p^2,p^3\cdots p^k$ 出现且仅出现一次. 故取 r,使得 r 满足

$$r=\min\{r\mid 1+2+3+\cdots r\ge a-N(p^a)\} \tag{7}$$

因为 $P^a=pp\cdots p$,p^a 仍是奇数,又由 $p^{1+2+3+\cdots+r}=p\times p^2\times\cdots\times p^r$,考虑Smarandache双倍因子函数的定义,

可得出 $Sdf(p^{1+2+3+\cdots+r})=p^r$ (8)

又设 $a=t_1+t_2+\cdots+t_s$,其中 t_i 互不相同且 t_s 为最大. 则 $p^a=p^{t_1}p^{t_2}\cdots p^{t_s}$ (9)

且 $p^r!!=1\times3\times5\times\cdots\times p^{r-1}p^r$ (10)

而 $N(p^a)=\{n\mid n=Sdf(p^k)\nmid p^k$ 的个数,$k=1,2,3\cdots\}$ (11)

当 $Sdf(p^a)\mid p^a$ 时,则 $p^a=p^r p^{N(p^a)}$. (12)

由以上(7)、(8)、(9)、(10)、(11)、(12)可得

存在整数 r, 且 $r = \min\{r \mid 1+2+3+\cdots+r \geq a - N(p^{a})\}$, 使得

$$Sdf(p^{a}) = \min\{p^{r} \mid p^{a} \mid p^{r}!!\} = p^{r}$$

2　定理的证明

定理1证明　设 $m_i = Sdf(p_i^{a_i})$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 则可得到 $2 \nmid m_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 且

$$p_i^{a_i} \mid m_i!!,\ (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{13}$$

又设 $m = \max(m_1, m_2, \cdots m_k)$, 则有 $m_i!! \mid m!!$, $(i = 1, 2, \cdots, k)$　(14)

因此, 由(11)和(12), 我们可以得到, $p_i^{a_i} \mid m!!$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$　(15)

已知 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的奇素数. 由此有 $(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1$, $1 \leq i \leq j \leq k$　(16)

我们由 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ 及(13)、(14), 可推导出 $n \mid m!!$.

所以, $Sdf(n) \leq m$.　(17)

另一方面, 根据Smarandache双倍因子函数的定义, 我们不妨设 $Sdf(n) < m$, 则

必然存在一个素数幂 $p_j^{a_j}$ $(1 \leq j \leq k)$, 使得 $p_j \mid Sdf(n)!!$ 成立　(18)

由 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ 和(16), 可知 $n \mid Sdf(n)!!$, 从而与假设矛盾.

因此, 由(15)得到, $Sdf(n) = m$.

故 $Sdf(n) = \max(Sdf(p_1^{a_1}), Sdf(p_2^{a_2}), \cdots, Sdf(p_k^{a_k}))$ 成立.

定理2证明　设 $m_0 = Sdf(2^{a})$ 且 $m_1 = Sdf(n_1)$, 则有 $2^{a} \mid m_0!!$, $n_1 \mid m_1!!$　(19)

又由 $(2m_1)!! = 2 \times 4 \times \cdots \times (2m_1) = 2^{m_1} m_1! = 2^{m_1} m_1!!(m_1 - 1)!!$,

由此, 我们便可得出 $m_1!! \mid (2m_1)!!$. 从而有 $n_1 \mid (2m_1)!!$　(20)

设 $m = \max(m_0, 2m_1)$, 则 $m_0!! \mid m!!$ 和 $(2m_1)!! \mid m!!$

又因为 $(2^{a}, n_1) = 1$, 由(19)和(20)可知, $n \mid m!!$.

即有 $Sdf(n) \leq m$ 成立. 故 $Sdf(n) \leq \max(Sdf(2^{a}), 2Sdf(n_1))$.

参考文献:

[1] 闵嗣鹤. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982

[2] 闵嗣鹤. 数论的方法[M]. 北京: 科学出版社, 1984

[3] 潘承彪, 潘承洞. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992

[责任编辑　舒尚奇]

On Two Results of the Smarandache Function

CHEN Bin[1,2]

(1 Department of Mathematics, Weinan Teachers University, Weinan 714000, China;

2 Department of Mathematics, Northwest University, xi'an 710069, China)

Abstract: Based on elementary number theory to study Smarandache double factorial function, two important results are inducted, which plays an important role in the progressing of elementary number theory.

Key words: Smarandache; double factorial function; odd prime; integer