关于 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程 $S(n^{11}) = \varphi(n)$ 的解

唐 刚

(阿坝师范高等专科学校 基础教育系，四川 汶川 623000)

摘要: 设 n 表示任意正整数，$S(n)$ 和 $\varphi(n)$ 分别表示关于 n 的 Smarandache 函数和 Euler 函数. 主要利用分类讨论和初等方法，对 $S(n^{11}) = \varphi(n)$ 进行了研究，获得了该方程的所有正整数解.

关键词: Smarandache 函数; Euler 函数; 正整数解

中图分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1008 - 4142(2014)02 - 0119 - 03

1 引言

对于任意正整数 n，$S(n)$ 和 $\varphi(n)$ 分别表示关于 n 的 Smarandache 函数和 Euler 函数. Smarandache 函数是美籍罗马尼亚数论专家 Florentin · Smarandache [1] 引入的一个数论函数，其定义为使得 $n \mid m!$ 的最小正整数 m，即为 $S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in N\}$. 目前，关于 Smarandache 函数的研究是近期数论及其相关领域的一个引人关注的内容. Euler 函数 $\varphi(n)$ 表示不大于 n 且与 n 互质的正整数的个数. 有关 Smarandache 函数与 Euler 函数的方程

$$S(n^k) = \varphi(n) \tag{1}$$

的解，很多学者都进行了研究，马金萍老师 [2] 研究了当 $k = 1$ 时，方程(1)的全部解为 n = 1, 8, 9, 12, 18; 易媛 [3] 研究了 $k = 2, 3, 4$ 时，方程(1)的解; 黄寿生 [4] 研究了 $k = 5$，方程(1)的解; 高楠 [5] 研究了 $k = 6$，方程(1)的解; 陈斌 [6] 研究了 $k = 8, 9$ 时，方程(1)的解.

本文利用初等方法和分类讨论法，解决了(1)在 $k = 11$ 时的求解及解的个数问题.

定理 当 $k = 11$ 时，方程(1)仅有正整数解 $n = 1, 135, 144, 216, 270, 529, 1058$.

2 引理

引理 1 [7] 对于质数 p 和正整数 α，有 $S(p^\alpha) \le \alpha p$，如果 $\alpha < p$，则有 $S(p^\alpha) = \alpha p$.

引理 2 [7] $S(n) = \max\limits_{1 \le i \le m}\{S(p_1^{\alpha_1}), S(p_2^{\alpha_2}), \cdots, S(p_m^{\alpha_m})\} = S(p^\alpha)$，设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{m-1}^{\alpha_{m-1}} p_m^{\alpha_m} = p^\alpha m$，其中 p 为质数，且 $(p, m) = 1$.

引理 3 当 $n > 2$ 时，必有 $2 \mid \varphi(n)$

3 定理的证明

把 $k = 11$ 代入(1)中可得

$$S(n^{11}) = \varphi(n) \tag{2}$$

3.1 显然 $n = 1$ 是方程(2)的解

3.2 若 $n > 1$ 时，设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{m-1}^{\alpha_{m-1}} p_m^{\alpha_m} = p^\alpha m$，其中 p 为质数，且 $(p, m) = 1$，由引理 2 可知:

$$S(n^{11}) = \max_{1 \le i \le m}\{S(p_1^{11\alpha_1}), S(p_2^{11\alpha_2}), \cdots, S(p_m^{11\alpha_m})\} = S(p^{11\alpha}) \tag{3}$$

则: $\varphi(n) = \varphi(p^\alpha m) = \varphi(p^\alpha)\varphi(m) = p^{\alpha-1}(p - 1)\varphi(m)$ (4)

联立(2)、(3)、(4)可得

$$S(p^{11\alpha}) = p^{\alpha-1}(p - 1)\varphi(m) \tag{5}$$

3.2.1 当 $\alpha = 1$ 时，由(5)可知: $S(p^{11}) = (p - 1)\varphi(m)$ (6)

当 $p = 2$ 时，由(6)可知，$S(2^{11}) = \varphi(m) = 14$，则 $\varphi(m) = 14$，由引理 3 可知: m 中必含奇质因数 q，则 n 中必含奇质因数 q，而

收稿日期: 2014 - 04 - 15

基金项目: 阿坝师专校级基金项目“高校人文专业数学教学改革的探索与实践研究”(ASB11 - 10)的阶段性研究成果。

作者简介: 唐刚(1980—)，男，四川蓬安人，阿坝师专基础教育系讲师，硕士，研究方向: 数论、数学教育。

$$S(q^{11})=\begin{cases}27 & q=3\\ 50 & q=5\\ 70 & q=7\\ 121 & q=11\\ 11q & q>11\end{cases} \tag{7}$$

所以(7)与(3)矛盾,故 $\alpha=1$,$p=2$ 时方程(2)无解

当 $p=3$ 时,由(6)可知:$S(3^{11})=2\varphi(m)=27$,则 $\varphi(m)=27$,与引理3矛盾,故 $\alpha=1$,$p=3$ 时方程(2)无解

当 $p=5$ 时,由(6)可知:$S(5^{11})=4\varphi(m)=50$,则 $\varphi(m)=\frac{25}{2}$,与引理5矛盾,故 $\alpha=1$,$p=5$ 时方程(2)无解

当 $p=7$ 时,由(6)可知:$S(7^{11})=6\varphi(m)=70$,则 $\varphi(m)=\frac{35}{3}$,与引理5矛盾,故 $\alpha=1$,$p=7$ 时方程(2)无解

当 $p=11$ 时,由(6)可知:$S(11^{11})=10\varphi(m)=121$,则 $\varphi(m)=\frac{121}{10}$,与引理5矛盾,故 $\alpha=1$,$p=11$ 时方程(2)无解

当 $p>11$ 时,由(6)可知:$S(p^{11})=(p-1)\varphi(m)=11p$,则 $\varphi(m)=\frac{11p}{p-1}$,因为 $(p-1,p)=1$,$(11,P-1)=1$,所以 $\frac{11p}{p-1}$ 不是整数,与引理5矛盾,故 $\alpha=1$,$p>11$ 时方程(2)无解

3.2.2 当 $\alpha=2$ 时,由(5)可知:$S(p^{22})=p(p-1)\varphi(m)$ (8)

当 $p=2$ 时,由(8)可知:$S(2^{22})=2\varphi(m)=24$ 则 $\varphi(m)=12$,由引理3可知:m 中必含奇质因数 q,则 n 中必含奇质因数 q,而 $S(q^{11\alpha})>24$,与(3)矛盾,故 $\alpha=2$,$p=2$ 时方程(2)无解

当 $p=3$ 时,由(8)可知:$S(3^{22})=6\varphi(m)=48$,则 $\varphi(m)=8$,此时只有当 $q=2$ 时,$S(2^{11\alpha})\le 48$,其中 $1\le\alpha\le 4$,即 $m=2^r$,$\varphi(2^r)=2^{r-1}=8$,所以 $r=4$,故 $n=2^4\cdot 3^2=144$ 为方程(2)的解

当 $p=5$ 时,由(8)可知:$S(5^{22})=20\varphi(m)=95$,则 $\varphi(m)=\frac{19}{4}$,与引理3矛盾,故 $\alpha=2$,$p=5$ 时方程(2)无解

当 $p=7$ 时,由(8)可知:$S(7^{22})=42\varphi(m)=140$,则 $\varphi(m)=\frac{10}{3}$,与引理3矛盾,故 $\alpha=2$,$p=7$ 时方程(2)无解

当 $p=11$ 时,由(8)可知:$S(11^{22})=110\varphi(m)=231$,则 $\varphi(m)=\frac{231}{110}$,与引理3矛盾,故 $\alpha=1$,$p=11$ 时方程(2)无解

当 $p=13$ 时,由(8)可知:$S(13^{22})=156\varphi(m)=273$,则 $\varphi(m)=\frac{273}{156}$,与引理3矛盾,故 $\alpha=2$,$p=13$ 时方程(2)无解

当 $p=17$ 时,由(8)可知:$S(17^{22})=302\varphi(m)=357$,则 $\varphi(m)=\frac{357}{302}$,与引理3矛盾,故 $\alpha=2$,$p=17$ 方程(2)无解

当 $p=19$ 时,由(8)可知:$S(19^{22})=342\varphi(m)=357$,则 $\varphi(m)=\frac{357}{342}$,与引理3矛盾,故 $\alpha=2$,$p=19$ 时方程(2)无解

当 $p=23$ 时,由(8)可知:$S(23^{22})=23\cdot 22\varphi(m)=506$,则 $\varphi(m)=1$,所以 $m=1$ 或2,故 $n=23^2=529$ 和 $n=2\cdot 23^{46}=1058$ 均为方程(2)的解

当 $p>23$ 时,由(8)可知:$S(p^{22})=p(p-1)\varphi(m)=22p$,则 $S(p^{22})=22p<p(p-1)\varphi(m)=\varphi(n)$,故 $\alpha=1$,$p>11$ 时方程(2)无解

3.2.3 当 $\alpha=3$ 时,由(5)可知:$S(p^{33})=p^2(p-1)\varphi(m)$ (9)

当 $p=2$ 时,由(9)可知:$S(2^{33})=4\varphi(m)=36$,则 $\varphi(m)=9$,与引理3矛盾,故 $\alpha=3$,$p=2$ 时方程(2)无解

当 $p=3$ 时,由(9)可知:$S(3^{33})=18\varphi(m)=72$,则 $\varphi(m)=4$,此时有 $S(2^{11\alpha})<72$,其中 $1\le\alpha\le 6$,和 $S(5^{11})=50<72$,则 $m=2^t$ 或 2^a5^b 或 5^h.

Ⅰ)当 $m=2^t$ 时,$\varphi(m)=\varphi(2^t)=2^{t-1}=4$,则 $t=3$,所以 $n=2^3\cdot 3^3=216$ 为方程(2)的解;

Ⅱ)当 $m=2^a5^b$ 时,$\varphi(m)=\varphi(2^a5^b)=2^{a+1}\cdot 5^{b-1}=2^2$,则 $a=1$,$b=1$,所以 $n=2\cdot 3^3\cdot 5=270$ 为方程(2)的解;

Ⅲ)当 $m=5^h$ 时,$\varphi(m)=\varphi(5^h)=5^{h-1}\cdot 4=$

4，则 $h = 1$，所以 $n = 3^3 \cdot 5 = 135$ 为方程(2)的解.

当 $p = 5$ 时，由(9)可知：$S(5^{33}) = 100\varphi(m) = 135$，则 $\varphi(m) = \frac{27}{20}$，与引理3矛盾，故 $\alpha = 3$，$p = 5$ 时方程(2)无解

当 $p \geq 7$ 时，由(9)可知：$S(p^{33}) = p^2(p-1)\varphi(m) \leq 33p$，则 $33 \geq p(p-1)\varphi(m) \geq p(p-1) > 42$ 矛盾，故 $\alpha = 3$，$p \geq 7$ 时方程(2)无解

3.2.4 当 $\alpha = 4$ 时，由(5)可知：$S(p^{44}) = p^3(p-1)\varphi(m)$ (10)

当 $p = 2$ 时，由(10)可知：$S(2^{44}) = 8\varphi(m) = 48$，则 $\varphi(m) = 6$，由引理3可知：m 中必含奇质因数 q，则 n 中必含奇质因数 q. 又因为 $S(3^{11}) = 27$ 和 $S(3^{22}) = 48$ 小于等于 $S(2^{44})$，则 $m = 3^\beta$，$\varphi(3^\beta) = 3^{\beta-1}(3-1) = 2 \cdot 3^{\beta-1} = 6$，所以 $\beta = 2$，故 $n = 2^4 \cdot 3^2 = 144$ 为方程(2)的解

当 $p = 3$ 时，由(10)可知：$S(3^{44}) = 54\varphi(m) = 90$，则 $\varphi(m) = \frac{5}{3}$，与引理3矛盾，故 $\alpha = 4$，$p = 3$ 时方程(2)无解

当 $p \geq 5$ 时，由(10)可知：$S(p^{44}) = p^3(p-1)\varphi(m) \leq 44p$，则 $44 \geq p^2(p-1)\varphi(m) \geq p^2(p-1) \geq 100$ 矛盾，故 $\alpha = 4$，$p \geq 5$ 时方程(2)无解

3.2.5 当 $\alpha = 5$ 时，由(5)可知：$S(p^{55}) = p^4(p-1)\varphi(m)$ (11)

当 $p = 2$ 时，由(11)可知：$S(2^{55}) = 16\varphi(m) = 60$，则 $\varphi(m) = \frac{15}{4}$，与引理3矛盾，故 $\alpha = 5$，$p = 2$ 时方程(2)无解

当 $p \geq 3$ 时，由(11)可知：$S(p^{55}) = p^3(p-1)\varphi(m) \leq 55p$，则 $55 \geq p^4(p-1)\varphi(m) \geq p^4(p-1) \geq 162$ 矛盾，故 $\alpha = 5$，$p \geq 3$ 时方程(2)无解

3.2.6 当 $\alpha = 6$ 时，由(5)可知：$S(p^{66}) = p^5(p-1)\varphi(m)$ (12)

当 $p = 2$ 时，由(12)可知：$S(2^{66}) = 32\varphi(m) = 68$，则 $\varphi(m) = \frac{17}{8}$，与引理3矛盾，故 $\alpha = 6$，$p = 2$ 时方程(2)无解

当 $p \geq 3$，由(12)可知：$S(p^{66}) = p^5(p-1)\varphi(m) \leq 66p$，则 $66 \geq p^5(p-1)\varphi(m) \geq p^5(p-1) \geq 486$ 矛盾，故 $\alpha = 6$，$p \geq 3$ 时方程(2)无解

3.2.7 当 $\alpha = 7$ 时，由(5)可知：$S(p^{77}) = p^6(p-1)\varphi(m)$ (13)

当 $p = 2$ 时，由(13)可知：$S(2^{77}) = 64\varphi(m) = 80$，则 $\varphi(m) = \frac{5}{4}$，与引理3矛盾，故 $\alpha = 7$，$p = 2$ 时方程(2)无解

若 $p \geq 3$，由(13)可知：$S(p^{77}) = p^6(p-1)\varphi(m) \leq 77p$，则 $77 \geq p^6(p-1)\varphi(m) \geq p^6(p-1) \geq 1458$ 矛盾，故 $\alpha = 7$，$p \geq 3$ 时方程(2)无解

3.2.8 当 $\alpha \geq 8$，$p \geq 2$ 时，由(5)可知：$S(p^{11\alpha}) = p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m) \leq 11\alpha p$，则 $11\alpha \geq p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m) \geq p^{\alpha-1}(p-1) > 11\alpha$ 矛盾，故 $\alpha \geq 8$，$p \geq 2$ 时方程(2)无解

综上述当 $k = 11$ 时，方程(2)的解为 $n = 1$，135，144，216，270，529，1058.

参考文献：

[1] Smarandache F. A function in the number theory [J]. Ann Timisoar a UnivSer Math, 1980, (28).

[2] MA J P. An equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, (1).

[3] Y IY. An equation involving the Euler function and Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, (1).

[4] 黄寿生，陈锡庚. 关于数论函数方程 $\varphi(n) = S(n^5)$ [J]. 华南师范大学学报：自然科学版，2007，(4).

[5] 高楠，高丽. 关于数论函数方程 $\varphi(n) = S(n^7)$ [J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2009，(5).

[6] 陈斌. 一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2012，(2).

[7] Mark F, Patrick M. Bounding the Smarandach e function [J]. Smarandache Journal, 2002, (42).

[责任校对：王小琴]