2007年 6月 纯粹数学与应用数学 Jun. 2007
第 23卷第 2期 Pure and Applied Mathematics Vol. 23 No. 2

# 关于 Smarandache函数 $S(n)$的一个猜想

杜凤英[20]
(浙江金华职业技术学院,浙江 金华 321017)

摘 要: 对任意正整数 $n$,著名的 Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 $m$,使得 $n|m!$ .即就是 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in \mathbf{N}\}$.本文的主要目的是利用初等方法研究一个包含函数 $S(n)$的猜想,并部分的得到解决.

关 键 词: Smarandache函数;猜想;初等方法.
中图分类号: O156.4 文章标识码: A 文章编号: 1008-5513(2007)02-0205-04

## 1 引言及结论

对于任意正整数 $n$,著名的 Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 $m$,使得 $n|m!$ .即就是 $S(n)=\min\{m: m\in \mathbf{N}, n|m!\}$.从 $S(n)$的定义,我们很容易推断出如果 $n=p_1^{T_1}p_2^{T_2}\cdots p_k^{T_k}$ 是 $n$的标准素因数分解式,那么

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{T_i})\} \tag{1}$$

例如: $S(1)=1, S(2)=2, S(3)=3, S(4)=4, S(5)=5, S(6)=3, S(7)=7, S(8)=4, S(9)=6, S(10)=5, \cdots\cdots$ .关于 $S(n)$的算术性质,有不少学者进行过研究,获得了不少有重要理论价值的研究成果.例如, Farris Mark 和 Mitchell Patrick 在文 [1]中研究了 Smarandache函数的有界性问题,得出了函数 $S(p^T)$ 的上下界估计.即就是证明了:

$$(p-1)T+1\leqslant S(p^T)\leqslant (p-1)[T+1+\log_p T]+1 \tag{2}$$

王永兴教授在文 [2]中研究了 $S(n)$的均值性质,给出了该函数均值的一个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x} S(n)=\frac{c^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$$

Lu Yaming在文 [3]中研究了一个包含 $S(n)$的方程的可解性问题,证明了对任意正整数 $k\geqslant 2$,方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

Jozsef Sandor在文 [4]中进一步证实对任意正整数 $k\geqslant 2$,存在无限多组正整数 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足不等式:

---

[20]收稿日期: 2006-3-8.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671155).
作者简介: 杜凤英 (1963-),女,讲师,研究方向: 基础数学.

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

同样又存在无限多组正整数 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 使得

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

Fu Jing 在文 [5]中还证明了更强的结论: 即就是如果正整数 $k$ 和 $m$ 满足下面三个条件之一,

(a) $k>2$ 和 $m\geqslant 1$ 均为奇数;

(b) $k\geqslant 5$ 为奇数,$m\geqslant 2$ 为偶数;

(c) 任意偶数 $k\geqslant 4$ 和任意正整数 $m$;

那么方程

$$m\cdot S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

此外,徐哲峰在文 [6]中研究了 $S(n)$ 的值分布问题,获得了一个更深刻的结果.即就是证明了下面的定理:

设 $P(n)$ 表示 $n$ 的最大素因子,则对任意实数 $x>1$,我们有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta-函数.

本文的主要目的是研究一个包含 Smarandache函数 $S(n)$ 的猜想,并部分的得到解决! 具体地说也就是对任意正整数 $n$,我们讨论和式

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)} \tag{3}$$

是否为整数? 并猜测仅有有限个正整数 $n$ 使得 (3) 式为整数.进一步我们有下面的

猜想　对任意正整数 $n$,$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}$ 为整数当且仅当 $n=1, 8$.

虽然目前我们还不能证明这一猜想,但是我们对它的正确性是深信不疑的! 本文中我们利用初等方法证明了支持这一猜想的几个结论,具体地说也就是对一些特殊的正整数,我们证明了下面的:

**定理 1**　当 $n$ 为无平方因子数时, (3) 式不可能是正整数.

**定理 2**　对任意奇素数 $p$ 及任意正整数 $\alpha$,当 $n=p^\alpha$ 且 $\alpha\leqslant p$ 时, (3) 式不可能是正整数.

**定理 3**　对于任意正整数 $n$,当 $n$ 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\cdot p_k$ 且 $S(n)=p_k$ 时, (3) 式不可能是正整数.

## 2　定理的证明

在这一部分,我们来完成定理的证明.首先证明定理 1.为方便起见我们解释一下无平方因子数的定义: 一个正整数 $n$ 称作无平方因子数,如果 $n>1$ 且对任意素数 $p$,当 $p\mid n$ 时有 $p^2\nmid n$.

有了这个定义,我们可以直接证明定理 1.事实上对任意无平方因子数 $n$,可设 $n=p_1\cdot$

$p_2\cdots p_k$ 为 $n$ 的标准分解式,其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 为素数.于是由(1)式我们不难看出 $S(n)=S(p_1\cdot p_2\cdots p_k)=p_k$.当 $k=1$时,$n=p_1$为素数,此时

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d\mid p_1}\frac{1}{S(d)}=\frac{1}{S(1)}+\frac{1}{S(p_1)}=1+\frac{1}{p_1}\tag{4}$$

由于 $p_1>1$,所以(4)式不可能是整数.

当 $k>1$时,注意到对任意 $d\mid p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}$我们有 $S(dp_k)=p_k$.于是

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}&=\sum_{d\mid p_1\cdot p_2\cdots p_k}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d\mid p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d\mid p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(dp_k)}\\&=\sum_{d\mid p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d\mid p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{p_k}=\sum_{d\mid p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\frac{2^{k-1}}{p_k}\\&=\cdots\cdots=\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{p_i}\end{aligned}\tag{5}$$

显然(5)式不可能是整数.若不然,假定$\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}$为整数,则由(5)式知$\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{p_i}$也为整数.不妨设$\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{p_i}=m$,由于 $k>1$,所以 $p_k$为奇素数,所以$\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{p_i}-m=\frac{2^{k-1}}{p_k}$,或者

$$p_1\cdot p_2\cdots p_k\cdot\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2^{i-1}}{p_i}-m\right)=p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}\cdot 2^{k-1}\tag{6}$$

显然(6)式左边能够被 $p_k$整除,而右边不能被 $p_k$整除,矛盾! 所以(5)式不可能为整数.于是证明了定理 1.

现在我们证明定理 2.为此,我们需要下面一个简单的:

引理　对任意正整数 $n>1$,设

$$C_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

则 $C_n$不可能为正整数!

证明　我们用反证法来证明这一结论.假定对某一正整数 $n>1$,$C_n$为整数.则可设 $C_n=m$以及 $i=2^{\alpha_i}\cdot l_i$, $2\nmid l_i$, $i=1,2,\cdots,n$.现在设 $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$.则 $\alpha$在所有 $i=1,2,\cdots,n$的分解式中只出现一次,也就是说是唯一的! 若不然,则存在两个正整数 $1\leqslant r,s\leqslant n$使得 $\alpha_r=\alpha_s=\alpha$.由于 $r\neq s$,所以 $l_r\neq l_s$,从而在奇数 $l_r$和 $l_s$之间一定存在一个偶数,设为 $2l$.于是 $1<2^{\alpha}\cdot 2l=2^{\alpha+1}\cdot l\leqslant n$,即就是存在正整数 $m=2^{\alpha_r+1}\cdot l$也介于 1和 $n$之间且它含 2的方幂大于 $\alpha$.这于 $\alpha$的定义矛盾! 从而证明 $\alpha$是唯一的.现在设 $u=2^{\alpha}\cdot l_u$,$M=2^{\alpha-1}\cdot l_1\cdot l_2\cdots l_n$.则

$$\begin{aligned}M\cdot C_n&=M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{M}{u}\\&=M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{l_1\cdot l_2\cdots l_n}{2}\end{aligned}\tag{7}$$

在(7)式中,由假设 $M\cdot C_n$为整数,而由 $M$的定义可知

$M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$也为整数,但是$\frac{l_1\cdot l_2\cdots l_n}{2}$不是整数,矛盾! 从而 $C_n$不可能是正整数! 引理正毕.

现在我们完成定理 2的证明,对于任意奇素数 $p$ 及正整数 $\alpha$,当 $n = p^{\alpha}$ 时,设 $1 \leqslant \alpha \leqslant p$. 则由(1)式不难计算出

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{S(d)} = \sum_{d \mid p^{\alpha}} \frac{1}{S(d)} = \frac{1}{S(1)} + \frac{1}{S(p)} + \frac{1}{S(p^2)} + \cdots + \frac{1}{S(p^{\alpha})}$$

$$= 1 + \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\alpha}\right) \tag{8}$$

由引理及(8)式我们立刻得到当 $n = p^{\alpha}$ 且 $1 \leqslant \alpha \leqslant p$ 时,(2)式不可能是整数.于是证明了定理 2.

定理 3的证明:为方便起见设 $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cdot p_k = u \cdot p_k$ 并注意到 $S(n) = p_k$,所以我们有

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{S(d)} = \sum_{d \mid u} \frac{1}{S(d)} + \sum_{d \mid u} \frac{1}{S(dp_k)} = \sum_{d \mid n} \frac{1}{S(d)} + \sum_{d \mid u} \frac{1}{p_k}$$

$$= \sum_{d \mid u} \frac{1}{S(d)} + \frac{d(u)}{p_k} \tag{9}$$

其中 $d(u)$ 为除数函数,即 $d(u)$ 表示 $u$ 的所有正因数的个数.

在(9)式中显然当 $d \mid u$ 时,$S(d) < p_k$.所以在有理数 $\sum_{d \mid u} \frac{1}{S(d)}$ 中,它的分母中不含素数 $p_k$. 因而当 $\sum_{d \mid n} \frac{1}{S(d)}$ 为整数时,$\frac{d(u)}{p_k}$ 必须为整数,从而 $p_k \mid d(u) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{k-1} + 1)$,由于 $p_k$ 为素数,所以 $p_k$ 整除某一 $(\alpha_i + 1)$.从而可得

$$\alpha_i + 1 \geqslant p_k \tag{10}$$

由(2)式及(10)式知

$$S(p_i^{\alpha_i}) \geqslant (p_i - 1) \cdot \alpha_i + 1 \geqslant \alpha_i + 1 \geqslant p_k \tag{11}$$

且 $S(p_i^{\alpha_i}) \neq p_k$,这是因为 $p_i \mid S(p_i^{\alpha_i})$.因而 $S(p_i^{\alpha_i}) \geqslant p_k$.这与 $S(n) = p_k$ 矛盾,所以定理 3成立.于是完成了定理的证明.

## 参 考 文 献


[1] Farris Mark, Mitshell Patrick. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 37-42.

[2] Wang Yongxing. On the Smarandache function[C]// Zhang Wenpeng, Li Junzhuang, Liu Duansen. Research on Smarandache Pronblem In Number Theory II. Hexis Phoenix, AZ 2005.

[3] Liu Yaming. On the solutions of an equation invloving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[4] Jozsef Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[5] Fu Jing. An equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(4): 83-86.

[6] 徐哲峰. Smarandache函数的值分布性质[J].数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[7] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.


(下转第 **213**页)

[3] Li G. Oscillatory behavior of solutions to a generalized nonautonomous delay logistic equation [J]. Ann. Differential Equations, 1991, 7(4): 432-438.

[4] Aiello W G. The existence of nonoscillatory solutions to a generalized, nonautonomous, delay logistic equation[J]. J. Math. Anal. Appl., 1990, 149(1): 114-123.

[5] Chen M P, Yu J S, Zeng D G, et al. Global attractivity in a generalized nonautonomous delay logistic equation [J]. Bulletin of Institute of Mathematics Academia sinica, 1994, 22(2): 91-99.

[6] 冯伟,赵爱民,燕居让.广义时滞 Logistic方程的全局吸引性[J].高校应用数学学报: A辑, 2001, 16(2): 136-142.

## Global attractivity in a class of generalized delay logistic equation

LI Liping

(1. Department of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China;
2. Department of Mathematics, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** In this paper, the global attractivity of a class of generalized delay Logistic equations is considered and a sufficient condition for all solutions of the equation tending to the postive equilibrium point is obtained. Some known results are improved and generalized.

**Key words** Delay Logistic equation, Oscillation, Nonoscillatory solution, Global attractitity

**2000 MSC** 34K20

(上接第 208页)

## On a conjecture of the Smarandache function $S(n)$

DU Fengying

(Zhejiang Jinhua College of Profession and Technology, Jinhua 321017, China)

**Abstract** For any positive integer $n$, the famous Smarandache function $S(n)$ defined as the smallest positive integer m such that $n \mid m!$. That is, $S(n) = \min\{m : n \mid m!, n \in \mathbf{N}\}$. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study a conjecture involving the Smarandache function $S(n)$, and solved this conjecture partly.

**Key words** Smarandache function, Conjecture, Elementary methods

**2000 MSC** 11B83