DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2011.04.039

第 23 卷 第 4 期
2011 年 12 月

甘肃科学学报
Journal of Gansu Sciences

Vol. 23 No. 4
Dec. 2011

关于 Smarandache-Type 可乘函数的均值

王明军

（渭南师范学院 数学与信息科学系，陕西 渭南 714000）

摘 要： 研究了 Smarandache-Type 可乘函数 $F_m(n)$ 与 $G_m(n)$ 在无 m 次幂因子数集上的均值分布性质，利用解析方法及欧拉乘积公式得到了 2 个渐近公式，从而推广了关于 Smarandache-Type 可乘函数的算术性质.

关键词： Smarandache-Type 可乘函数；无 m 次幂因子数；渐近公式

中图分类号： O174.1 **文献标志码：** A **文章编号：** 1004-0366(2011)04-0009-03

Mean Value of the Smarandache-Type Multiplicative Functions

WANG Ming-jun

(*Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers' College, Weinan* 714000, *China*)

Abstract: The main purpose of this paper is to study the distributive properties of Smarandache-Type functions $F_m(n)$ and $G_m(n)$ on the m-power numbers, and two asymptotic formulae are obtained by using the analytic method and Euler product formula. Hence, the properties of Smarandache-Type functions are generalized.

Key words: Smarandache-Type multiplicative function; m-th power free number; asymptotic formula

1 预备知识

一个正整数 n 叫做无 m 次幂因子数，如果它不是 $2^m, 3^m, 5^m, 7^m, \cdots, p^m, \cdots$ 的积，即它不能被任一素数的 m 次幂整除. 在自然数集中(除去 0 和 1)，去掉 2^m 的积，去掉 3^m 的积，去掉 5^m 的积，去掉所有素数的 m 次幂的积，则可以得到无 m 次幂因子数列. 在文献[1]的第 31 个问题中，Smarandache 教授要求我们研究这个数列的性质. 关于特殊数列许多学者进行了研究[2-6]，在文献[5]中，将 Smarandache-Type 可乘函数 $F_m(n)$ 和 $G_m(n)$ 定义如下：对任意正整数 n，其标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，$1 \leqslant i \leqslant k$，则有

$$F_m(p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} 1, \text{若 } \alpha_i = mk \\ p_i^m, \text{其他.} \end{cases} \quad G_m(p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} 1, \text{若 } \alpha_i = mk \\ p_i, \text{其他.} \end{cases}$$

关于这 2 个函数，文献[6]给出了 2 个渐近公式：

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\in A}}^{\infty} \frac{F_k(n)}{n^s} = \frac{\zeta((k-1)s)}{\zeta((k^2-1)s)} \prod_p \left(1 + \frac{(1-p^k)(p^{(ks-k^2 s)}-1)}{p^{(k-1)s} - p^{(ks-k^2 s)}}\right),$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\in A}}^{\infty} \frac{G_k(n)}{n^s} = \frac{\zeta((k-1)s)}{\zeta((k^2-1)s)} \prod_p \left(1 + \frac{(1-p)(p^{(ks-k^2 s)}-1)}{p^{(k-1)s} - p^{(ks-k^2 s)}}\right).$$

以下主要利用解析方法研究了 $F_m(n)$ 与 $G_m(n)$ 在无 m 次幂因子数集上的均值性质，并给出了 2 个渐近公式.

收稿日期：2011-01-20
基金项目：陕西省教育厅科研基金项目(2010JK540)

定理 1 设 $m \geqslant 2$，且为正整数，A 为无 m 次幂因子数集，则有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} F_m(n) = \frac{6\zeta(m+1)x^{m+1}}{\pi^2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{m+1}+p^m} - \frac{1}{p^{m^2}+p^{m^2-1}}\right) + O(x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

其中 ε 为任意的正数.

定理 2 设 $m \geqslant 2$，且为正整数，A 为无 m 次幂因子数集，则有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} G_m(n) = x^2 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2+p^m} - \frac{1}{p^{2m-1}+p^{2m-2}}\right) + O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

2 定理的证明

首先证明定理 1. 设

$$f(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in A}}^{\infty} \frac{F_m(n)}{n^s}, \mathrm{Re}(s) > m+1.$$

由函数 $F_m(n)$ 的可乘性，根据 Euler 乘积公式[7]，可得

$$f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{F_m(p)}{p^s} + \frac{F_m(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{F_m(p^{m-1})}{p^{(m-1)s}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{p^m}{p^s} + \frac{p^m}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^m}{p^{(m-1)s}}\right) =$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{p^m}{p^s} \cdot \frac{1-p^{-(m-1)s}}{1-p^{-s}}\right) = \zeta(s) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{p^m}{p^s} - \frac{p^m}{p^{ms}}\right) =$$

$$\zeta(s) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{s-m}} - \frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{(s-1)m}}\right) = \zeta(s) \frac{\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s+p^m} - \frac{1}{p^{m(s-1)}+p^{s(m-1)}}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann-Zeta 函数.

因为 $|F_m(n)| \leqslant n^m$，$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_m(n)}{n^s}\right| < \frac{1}{\sigma - m - 1}$，其中 $\sigma > m+1$ 是 s 的实部. 根据 Perron 公式[8] 有

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{F_m(n)}{n^{s_0}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s+s_0) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right) +$$

$$O\left(x^{1-\sigma_0} H(2x) \min\left(1, \frac{\log x}{T}\right)\right) + O\left(x^{-\sigma_0} H(N) \min\left(1, \frac{x}{\| x \|}\right)\right),$$

N 是离 x 最近的整数，$\| x \| = | x - N |$. 在上式中取 $s_0 = 0$，$b = m+2$，$H(x) = x^m$，$B(\sigma) = \frac{1}{\sigma - m - 1}$，$T = x^{\frac{3}{2}}$，则有

$$\sum_{n \leqslant x} F_m(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m+2-iT}^{m+2+iT} \zeta(s) \frac{\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)} R(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O(x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

其中 $R(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s+p^m} - \frac{1}{p^{m(s-1)}+p^{s(m-1)}}\right)$.

为了估计其主项

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{m+2-iT}^{m+2+iT} \zeta(s) \frac{\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)} R(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s,$$

将积分限从 $s = m+2 \pm iT$ 移至 $s = m + \frac{1}{2} \pm iT$，这时函数 $\zeta(s) \frac{\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)} \frac{x^s}{s} R(s)$ 在 $s = m+1$ 处为一级极点，留数为 $\zeta(m+1) \frac{1}{\zeta(2)} x^{m+1} R(m+1)$，即

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{m+2-iT}^{m+2+iT} + \int_{m+2+iT}^{m+\frac{1}{2}+iT} + \int_{m+\frac{1}{2}+iT}^{m+\frac{1}{2}-iT} + \int_{m+\frac{1}{2}-iT}^{m+2-iT}\right) \zeta(s) \frac{\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)} \frac{x^s}{s} R(s) \mathrm{d}s = \zeta(m+1) \frac{1}{\zeta(2)} x^{m+1} R(m+1).$$

注意到

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{m+2+iT}^{m+\frac{1}{2}+iT} + \int_{m+\frac{1}{2}-iT}^{m+2-iT}\right) \zeta(s) \frac{\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)} \frac{x^s}{s} R(s) \mathrm{d}s \right| \ll$$

$$\int_{m+\frac{1}{2}}^{m+2} \left| \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{m+2+iT}^{m+\frac{1}{2}+iT} + \int_{m+\frac{1}{2}-iT}^{m+2-iT}\right) \zeta(s) \frac{\zeta(\sigma-m+iT)}{\zeta(2(\sigma-m+iT))} R(s) \frac{x^{m+2}}{T} \right| \mathrm{d}\sigma \ll \frac{x^{m+2}}{T} = x^{m+\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{m+\frac{1}{2}+iT}^{m+\frac{1}{2}-iT}\zeta(s)\frac{\zeta(\sigma-m)}{\zeta(2(\sigma-m))}\frac{x^s}{s}R(s)\mathrm{d}s\right|\ll x^{m+\frac{1}{2}+\epsilon},$$

因此有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\frac{F_m(n)}{n^s}=\frac{6\zeta(m+1)x^{m+1}}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{m+1}+p^m}-\frac{1}{p^{m^2}+p^{m^2-1}}\right)+O(x^{m+\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

证明定理2.

令 $g(s)=\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{G_m(n)}{n^s}$,由函数 $G_m(n)$ 的定义及Euler乘积公式有

$$g(s)=\prod_p\left(1+\frac{G_m(p)}{p^s}+\frac{G_m(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{G_m(p^{m-1})}{p^{(m-1)s}}\right)=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p}{p^{(m-1)s}}\right)=$$

$$\prod_p\left(1+p\left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{(m-1)s}}\right)\right)=\zeta(s)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{s-1}}-\frac{1}{p^{ms-1}}\right).$$

根据Perron公式,利用证明定理1的方法可以得到定理2的结论.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] 马爱梅. 关于整数 n 的平方根序列的几个渐进公式[J]. 延安大学学报:自然科学版, 2006, 13(2): 10-11.
[3] 杨存典, 李超, 李军庄. 一个数论函数的渐近公式[J]. 甘肃科学学报, 2006, 18(2): 20-21.
[4] Yang Cundian, Li Chao. Asymptotic Formulae of SmarandacheType Multiplicative Function[M]. Research on Smarandache Problems in Number Theory. Phoenix: Hexis, 2004.
[5] Henry Bottomley. Some Smarandache-Type Multiplicative Functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 134-135.
[6] Zhang Xiaobeng. Equations on the Smarandache-Type Multiplicative Function[J]. Pure and Applied Mathematics, 2009, 25(3): 478-480.
[7] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.
[8] 潘承洞, 潘承彪. 解析函数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

作者简介:

王明军 (1972-), 男, 陕西省合阳人, 2006年毕业于延安大学基础数学专业, 获理学硕士学位, 现任渭南师范学院数学与信息科学系讲师, 研究方向为数论.