DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2014.03.003



# 关于 Smarandache Ceil 函数的一个混合均值

祁 兰[1],赵院娥[2]
(1. 榆林学院 数学系,陕西 榆林 719000;2. 延安大学 数学与计算机学院,陕西 延安 716000)

**摘 要:** 对任意正整数 $n,k\geqslant 2$ 为给定整数,Smarandache Ceil 函数 $s_k(n)$ 定义为最小的正整数 $x$,使得 $n|x^k$,即 $S_k(n)=\min\{x:x\in N,n|x^k\}$. 利用 Smarandache Ceil 函数的定义及解析的方法,研究 Smarandache Cei 函数 $s_k(n)$ 与欧拉函数的均值分布性质,并给出一个有趣的渐近公式.

**关键词:** Smarandache Ceil 函数;欧拉函数;渐近公式
**中图分类号:** O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2014)03-0012-02

对一个任意正整数 $n,k$ 阶 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为最小的正整数 $x$,使得 $n\mid x^k$,即 $S_k(n)=\min\{x:x\in N,n\mid x^k\}$. 这个函数是由著名数论专家 F. Smarandache[1] 引入的,并建议研究它的性质. 关于函数 $S_k(n)$ 的算术性质,已有许多学者对此进行了研究,并获得了一些有趣的结果[2-6]. 以下主要利用解析的方法,研究 $k$ 阶 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 与欧拉函数的均值性质,并给出一个有趣的渐近公式,即下述的定理.

**定理** 设正整数 $k\geqslant 2$,整数 $m\geqslant 1$,则对任意实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi^m(S_k(n))=\frac{6\zeta(m+1)\zeta(k(m+1)-m)}{\pi^2(m+1)}R(m+1)x^{m+1}+O(x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

其中:$\zeta(s)$ 是 Riemann zeta 函数,$\varphi(n)$ 是 Euler 函数,$\varepsilon$ 是任意正实数,以及

$$R(m+1)=\prod_p\left[1-\frac{1}{1+p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{k(m+1)-m}}+\frac{1}{p^{m+1}}-\frac{1}{p^{(k+1)(m+1)-m}}-\left(1-\frac{1}{p^{k(m+1)}}\right)\cdot\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^m\right]\right].$$

**证明** 设 $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varphi^m(S_k(n))}{n^s}$,由欧拉乘积公式[7],有

$$f(s)=\prod_p\left(1+\frac{\varphi^m(S_k(p))}{p^s}+\frac{\varphi^m(S_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\varphi^m(S_k(p^k))}{p^{ks}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left[1+\frac{(p-1)^m}{p^s}\cdot\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}+\frac{(p^2-p)^m}{p^{2s}}\cdot\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}+\cdots+\frac{(p^k-p^{k-1})^m}{p^{ks}}\cdot\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}+\cdots\right]=$$

$$\prod_p\left[1+\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}\cdot\frac{\frac{1}{p^{s-m}}}{1-\frac{1}{p^{ks-m}}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^m\right]=\frac{\zeta(s)\zeta(ks-m)\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)}\cdot$$

$$\prod_p\left[1-\frac{1}{1+p^{s-m}}\left(\frac{1}{p^{s-m}}+\frac{1}{p^{ks-m}}+\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^{(k+1)s-m}}\right)-\left(1-\frac{1}{p^{ks}}\right)\cdot\frac{1}{p^{s-m}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^m\right].$$

在 Perron 公式[8] 中,取 $s_0=0,b=m+\frac{3}{2},T=x$,则有

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi^m(S_k(n))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}+m-iT}^{\frac{3}{2}+m+iT}\frac{\zeta(s)\zeta(ks-m)\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

收稿日期:2013-09-04
基金项目:陕西省教育厅科学研究项目(2013JK0557);榆林学院科研基金项目(11YK30)
作者简介:祁兰(1979-),女,陕西榆林人,讲师,研究方向为数论. E-mail:qilanmail@163.com

其中

$$R(s)=\prod_p\left[1-\frac{1}{1+p^{s-m}}\left(\frac{1}{p^{s-m}}+\frac{1}{p^{ks-m}}+\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^{(k+1)s-m}}\right)-\left(1-\frac{1}{p^{ks}}\right)\cdot\frac{1}{p^{s-m}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^m\right].$$

把积分线从 $\frac{3}{2}+m\pm iT$ 移到 $\frac{1}{2}+m\pm iT$,这时函数 $\frac{\zeta(s)\zeta(ks-m)\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)}R(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=m+1$ 有一个一阶极点,留数为 $\frac{\zeta(m+1)\zeta(k(m+1)-m)}{(m+1)\zeta(2)}R(m+1)x^{m+1}$,于是

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{3}{2}+m-iT}^{\frac{3}{2}+m+iT}+\int_{\frac{3}{2}+m+iT}^{\frac{1}{2}+m+iT}+\int_{\frac{1}{2}+m+iT}^{\frac{1}{2}+m-iT}+\int_{\frac{1}{2}+m-iT}^{\frac{3}{2}+m-iT}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(ks-m)\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s=$$
$$\frac{\zeta(m+1)\zeta(k(m+1)-m)}{(m+1)\zeta(2)}R(m+1)x^{m+1}.$$

注意到

$$\frac{1}{2\pi i}\left|\left(\int_{\frac{3}{2}+m+iT}^{\frac{1}{2}+m+iT}+\int_{\frac{1}{2}+m+iT}^{\frac{1}{2}+m-iT}+\int_{\frac{1}{2}+m-iT}^{\frac{3}{2}+m-iT}\right)\frac{\zeta(s)\zeta(ks-m)\zeta(s-m)}{\zeta(2s-2m)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll\frac{x^{\frac{3}{2}+m+\varepsilon}}{T}=x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

于是有

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi^m(S_k(n))=\frac{6\zeta(m+1)\zeta(k(m+1)-m)}{\pi^2(m+1)}R(m+1)x^{m+1}+O(x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

于是完成了定理的证明.

**参考文献:**


[1] Smarandache F. Only Problems,Not Solutions[M]. Chicago:Xiquan Publishing House,1993.

[2] Sabin Tabirca and Tatiana Tabirca. Some New Results Concerning the he Smarandache Ceil Function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002,13:30-36.

[3] Xu Zhefeng. On the Smarandache Ceil function and the Number of Prime Factors[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory. Phoenix USA:Hexis,2004:71-76.

[4] Ren Dongmei. On the Smarandache Ceil Function and the Dirichlet Divisor Function[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory(Vol. Ⅱ). Phoenix USA:Hexis,2005:51-54.

[5] Lu Yaming. On a Dual Function of the Smarandache Ceil function[C]//Research on Smarandache problems in Number Theory(Vol. Ⅱ). Phoenix USA:Hexis,2005:54-57.

[6] 朱敏慧. 一个包含 Euler 函数及 $k$ 阶 Smarandache ceil 函数的方程及其正整数解[J]. 纯粹数学与应用数学,2009,25(2):414-415.

[7] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York:Springer Verlag,1976.

[8] 潘承洞,潘承彪. 解析数基础论[M]. 北京:科学出版社,1991.


## On a Hybrid Mean Value of the Smarandache Ceil Function


QI Lan[1],ZHAO Yuan-e[2]

(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Yulin University*, *Yulin* 719000,*China*;

2. *College of Mathematics and Computer Science*, *Yanan University*, *Yan'an* 716000, *China* )



**Abstract:** For any positive integer $n$ and the given positive integer $k$ ($k\geqslant 2$), he Smarandache Ceil function $s_k(n)$ is defined as the smallest positive integer $x$ which makes $n|x^k$, that is $S_k(n)=\min\{x:x\in N,n|x^k\}$. The definition and the analytic method of the Smarandache Ceil function was utilized to study the distribution properties of the mean value of $s_k(n)$ and the Euler function, and give an interesting asymptotic formula.



**Key words:** Smarandache Ceil function;Euler function;Asymptotic formula