DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2012.06.030

第30卷 第6期 江 西 科 学 Vol. 30 No. 6
2012年12月 JIANGXI SCIENCE Dec. 2012

文章编号:1001-3679(2012)06-0714-03

关于 Smaradache 函数 $S(n)$ 与除数函数 $\sigma_\alpha(n)$ 的混合均值

朱 民

(商丘师范学院计算机与信息技术学院,河南 商丘 476000)

摘要: 对任意正整数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!$,即 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$。本文的主要目的是利用初等方法研究 Smarandache 函数 $S(n)$ 与除数函数 $\sigma_\alpha(n)$ 的混合均值,并给出了一个较强的渐近公式。

关键词: Smarandache 函数 $S(n)$;除数函数 $\sigma_\alpha(n)$;混合均值;渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A

On a Hybird Mean Value of the Smarandache Function and the Divisor Function

ZHU Min

(School of Computer and Information Technology, Shangqiu Normal University, Henan Shangqiu 476000 PRC)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$, *that is* $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study a hybird mean value problem involving the Smarandache function and the divisor function, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: Smarandache function, Divisor function, Hybrid mean value, Asymptotic formula

1 引言及结论

对任意正整数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 $n|m!$,即 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$,那么对于任意大于的正整数 n,如果它的标准分解式是 $n=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r}$,那么很容易得到

$$S(n)=\max\{S(p_1^{t_1}), S(p_2^{t_2}), \cdots, S(p_r^{t_r})\}=S(p^t) \tag{1}$$

例如 $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, …关于 $S(n)$ 的初等性质,许多学者进行了研究,并获得了一系列有趣的结果。

文献[2]研究了 $S(n)$ 的均值并得到一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\le x} S(n)=\frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right),$$

文献[3]研究了 F Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与除数函数 $\sigma_\alpha(n)$ 的混合均值并得到了如下结果:$k\ge 2$ 为给定的正整数,对任意实数 $x\ge 2$,有渐近式

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(n)\cdot SL(n)=\frac{\zeta(\alpha+2)\zeta(2)}{2+\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+$$

收稿日期:2012-11-07;修订日期:2012-12-05

作者简介:朱 民(1980-),男,河南商丘人,硕士研究生,主要从事网格技术与数论方向的研究。

$$\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\alpha+2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

文献[4]研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 与除数函数 $d(n)$ 的混合均值也得到了一个很好的渐近公式

$$\sum_{n\le x}d(n)S(n)=\frac{\pi^4}{36}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)。$$

本文的主要目的是研究Smarandache 函数$S(n)$与除数函数 $\sigma_\alpha(n)$ 的混合均值 $\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)$ 的均值分布问题,也是对文献[4]进行了推广,也就是下面的定理。

定理: 设 $k\ge 2$ 为给定的正整数,则对任意实数 $x\ge 2$,有渐近式

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)=\frac{\zeta(\alpha+2)\zeta(2)}{2+\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\alpha+2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中,$\sigma_\alpha(n)$ 为除数函数,即 n 的所有正因子的 α 次方幂的和,这里 $\alpha\ge 1$,$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha$,其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

2　定理的证明

在这部分,利用了初等及解析的方法直接给出定理的证明。事实上在和式 $\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)$ 中,将所有[1,x]中的整数分为 2 个部分,也就是 2 个集合 U 和 V,其中 U 包含所有那些正整数 n,其中 n 满足这样的条件: 存在一个素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数; 而集合 V 是指属于区间[1,x]但是不属于集合的 U 那些正整数。于是利用式(1)可得

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)=\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)+\sum_{n\in V}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)\tag{2}$$

现在讨论 n 属于集合 U 的情况:

$$\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)=\sum_{\substack{n\le x\\ p|n,\sqrt{n}<p}}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)=\sum_{\substack{np\le x\\ n<p}}\sigma_\alpha(np)\cdot S(np)=\sum_{\substack{np\le x\\ n<p}}(1+p^\alpha)\cdot p\cdot\sigma_\alpha(n)=\sum_{n<\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p<\frac{x}{n}}(p+p^{\alpha+1})=\sum_{n<\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p+\sum_{n<\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p^{\alpha+1}\tag{3}$$

设 $\pi(x)=\sum_{n\le x}1$。利用 Abel 求和公式(参阅文献[5]中定理 4.2)及素数定理(文献[6]中定理 3.2)可知:

$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$,其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数且 $c_1=1$,有

$$\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p=\frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}\pi(y)\,dy=\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right)\tag{4}$$

同样的方法可以求出

$$\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p^{\alpha+1}=\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha+1}\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n^{\alpha+1}\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}(\alpha+1)y^\alpha\pi(y)\,dy=\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)n^{\alpha+2}\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\alpha+2}\ln^i n}{n^{\alpha+2}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{n^{\alpha+2}\ln^{k+1}x}\right)\tag{5}$$

那么

$$\sum_{n<\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p+\sum_{n<\sqrt{x}}\sigma_\alpha(n)\cdot\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p^{\alpha+1}=\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{\sigma_\alpha(n)x^2}{2n^2\cdot\ln x}+\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^2\ln^i n\cdot\sigma_\alpha(n)}{n^2\ln^i x}+\sum_{n\le\sqrt{x}}O\left(\frac{x^2\cdot\sigma_\alpha''(n)}{n^2\ln^{k+1}x}\right)+\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{\sigma_\alpha(n)x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)n^{\alpha+2}\cdot\ln x}+\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\alpha+2}\ln^i n\cdot\sigma_\alpha(n)}{n^{\alpha+2}\ln^i x}+\sum_{n\le\sqrt{x}}O\left(\frac{x^{\alpha+2}\cdot\sigma_\alpha''(n)}{n^{\alpha+2}\ln^{k+1}x}\right)\tag{6}$$

可以利用结论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^2}=\zeta(2)\cdot\zeta(2-\alpha)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^\alpha+2}=\zeta(2)\cdot\zeta(2+\alpha)$(参阅文献[7])结合式(3)、式(4)、式(5)及式(6)可得如下的结果:

$$\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)=\frac{x^2}{2\ln x}\zeta(2)\cdot\zeta(2-\alpha)+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right)+\frac{\zeta(\alpha+2)\cdot\zeta(2)}{(\alpha+2)}\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\alpha+2}\ln^i n}{n^{\alpha+2}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{n^{\alpha+2}\ln^{k+1}x}\right)=\frac{x^2}{2\ln x}\zeta(2)\cdot\zeta(2-\alpha)+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^{\alpha+2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right)\tag{7}$$

其中 $\alpha\ge1$,c_i 为可计算的常数。

(下转第 739 页)

然保护区非繁殖期鸟类多样性研究 [J]. 四川动物，2011，30(4)：649 －653.
[4] 刘　戈，李小港，刘信中. 江西省陆生脊椎动物编目-Ⅱ. 鸟类 [J]. 江西林业科技，2011，(2)：48 －61.
[5] 戴年华，刘　玮，蔡汝林. 江西省官山自然保护区鸟类调查初报 [J]. 江西科学，1997，15(4)：243 －246.
[6] 承　勇，宋玉赞，赵　健，等. 江西井冈山国家级自然保护区鸟类资源调查与分析 [J]. 四川动物，2011，30(2)：277 －282.
[7] 廖承开，林宝珠，张昌友. 江西九连山国家级自然保护区鸟类新纪录 [J]. 江西林业科技，2011，(2)：44 －45.
[8] 李剑志. 龙虎山森林公园鸟类多样性研究 [J]. 岳阳职业技术学院学报，2011，26(5)：40 －42.
[9] 章旭日，邵明勤，简敏菲. 南昌市及近郊鸟类多样性和区系初步分析 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2009，33(4)：458 －462.
[10] 郭英荣，邵明勤，叶水送. 南昌大学周边鸟类多样性的初步研究 [J]. 安徽农业科学，2010，38(13)：6739 －6740.
[11] 李松志，王丽霞，苏媛娥. 昌九工业走廊中段共青——德安县城整合与协调发展研究 [J]. 九江学院学报，2007，(5)：52 －54.
[12] 郑楚亮，熊　庆，宋　晓. 基于 MAPGIS 园地补充耕地数据库建设——以共青市为例 [J]. 江西农业学报，2011，23(12)：163 －165.
[13] 舒特生，邵明勤，曾宾宾，等. 九岭山国家级自然保护区鸟类资源的研究 [J]. 安徽农业科学，2012，40(4)：2060 －2061.
[14] 李　飏，于晓平. 云南开远市鸟类多样性 [J]. 四川动物，2011，30(3)：415 －420.
[15] 邵明勤，章旭日，易智莉，等. 江西省鸟类多样性与区系分析 [J]. 长江流域资源与环境，2010，19(S1)：128 －131.

(上接第 715 页)

现在讨论 n 属于集合 V 的情况，由式(1)及集合 V 的定义可知: V 中任意的正整数 n，当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r}$ 时有 $S(n)$ 2 种情况即 $S(n)=p_r\le\sqrt{n}$，或者 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le x}\{S(p_i^{t_i})\}=S(p^t)$，其中 $t\ge2$，再结合上面的两式可以得到

$$\sum_{n\in V}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)\le\sum_{np\le x}\sigma_\alpha(np)\sqrt{np}+\sum_{np^t\le x,t\ge2}p^t\sigma_\alpha(np^t)\le\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(np^t)\sqrt{n}\ln n\le x^{\alpha+\frac{3}{2}}\ln x \quad (8)$$

其中用到了渐近公式 $\sum\limits_{n<x}\sigma_\alpha(n)=\dfrac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x^\beta)$，这里 $\beta=\max\{1,\alpha\}$ 由集合 U 和 V 的定义并结合式(2)、式(7)及式(8)可以得到

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)=\sum_{n\in U}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)+\sum_{n\in V}\sigma_\alpha(n)\cdot S(n)=\frac{\zeta(\alpha+2)\zeta(2)}{2+\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha+2}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_ix^{\alpha+2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+2}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中，$\alpha\ge1$，c_i 为可计算的常数，于是就完成了定理的证明。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems，Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House，1993.
[2] Wang Yongxing，On the smarandanche function [J]. Research Smarandache Problem in Number Theory，2005，(2)：103 －106.
[3] 付　静，刘　华. 关于 F Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与除数函数 $\sigma_\alpha(n)$ 的一个混合均值 [J]. 内蒙古师范大学学报，2010，39(6)：560 －562.
[4] 樊旭辉，赵春翔. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 与除数函数 $d(n)$ 的一个混合均值 [J]. 纯粹数学与应用数学，2008，24(4)：662 －665.
[5] Tom M. Apostol，Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag，1976.
[6] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社，1988.
[7] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社，1999.
[8] 潘承洞，潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社，2003.
[9] 张文鹏，初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社，2007.