关于 F. Smarandache的一个问题

高　楠[1]，　刘红艳[2]

(1. 西安石油大学理学院，陕西 西安　710065)
(2. 西安理工大学数学系，陕西 西安　710048)

摘　要：　F. Smarandache教授曾提出求最大的正整数 r，将集合 $\{1, 2, \cdots, r\}$ 分为 n 类，使得在每一类中方程 $xy = z(x > 1, y > 1)$ 无解．确立并证明了 r 的下界，即 $r \geq n^9$.

关键词：　整数分拆；方程；解数；下界

1　引言及结论

设 n，r 为正整数，罗马尼亚数论专家 F. Smarandache教授在文献 [1]的第 57个问题中提出求最大的整数 r，使得将集合 $\{1, 2, \cdots, r\}$ 分为 n 个子集，在每个子集中，方程 $xy = z$ 均无解．关于这一问题，至今似乎没有人进行研究，甚至不知道它的下界是什么．本文利用初等方法讨论了这一问题，并证明了下面的：

定理　对上述 r 及任意充分大的正整数 n，我们有估计式 $r \geq n^9$.

2　定理的证明

现在我们直接给出定理的证明，取 $r = n^9$，并将集合 $\{1, 2, \cdots, r\} = \{1, 2, \cdots, n^9\}$ 分为如下 n 类：

第 1类：　$1, n^4, n^4 + 1, \cdots, n^8$.

第 2类：　$2, n^8 + 1, n^8 + 2, \cdots, 2n^8$.

第 3类：　$3, 2n^8 + 1\ 2n^8 + 2 \cdots\ 3n^8$.

⋮

第 $n-4$类：　$n-4, (n-5)n^8 + 1, (n-5)n^8 + 2, \cdots, (n-4)n^8$.

第 $n-3$类：　$n-3, (n-4)n^8 + 1, (n-4)n^8 + 2, \cdots, (n-3)n^8, n^4 - 3n^3 + 1, \cdots, n^4 - 1$.

第 $n-2$类：　$n-2, (n-3)n^8 + 1, (n-3)n^8 + 2, \cdots, (n-2)n^8, n^3 - n^2 + 1, \cdots, n^4 - 3n^3$.

第 $n-1$类：　$n-1, (n-2)n^8 + 1, (n-2)n^8 + 2, \cdots, (n-1)n^8, n^2 + 1, \cdots, n^3 - n^2$.

第 n类：　$n, (n-1)n^8 + 1, (n-1)n^8 + 2, \cdots, n^9, n + 1, \cdots, n^2$.

容易看出此分类可将 n^9 个数分完，将此分类记为 A.

从分类中可知：

(i) 第一类中的任意一个数可写为 $ln^4 + m(0 \leq l \leq n^4 - 1, 1 \leq m \leq n^4)$，因为

$$1(ln + m) = ln + m$$

而且第一类中不存在两两相等的数；又因为在第一类中不等于 1的最小的两个数是 n^4，$n^4 + 1$，最大的数是 n^8，而

收稿日期：2002-12-13

$$n^4(n^4+1)>n^8$$

所以在第一类中方程 $xy=z$ 无解;

(ii) 当 $2\leq k\leq n-4$ 时,第 k 类中任意一个不等于 k 的数可表示为:

$$(k-1)n^8+ln+m$$

其中 $0\leq l\leq n^7-1$, $1\leq m\leq n$.

第 k 类中最小的两个数是 k, $(k-1)n^8+1$, 最大的数是 kn^8, 因为

$$k[(k-1)n^8+1]>kn^8$$

所以第 k 类中方程 $xy=z$ 也无解;

(iii) 第 n 类: 在 n, $(n-1)n^8+1$, $\cdots$, n^9 和 $n+1$, $\cdots$, n^2 中:

因为

$$n[(n-1)n^8+1]>n^9,$$
$$(n+1)(n+2)>n^2,$$
$$n(n+1)>n^2,$$

所以在 n 类中方程 $xy=z$ 仍然无解;

用同样的方法可证明在第 $n-3$, $n-2$, $n-1$ 类中方程也无解.

综合上述所证, 如果取 $r=n^9$,且把 $\{1,2,\cdots,r\}$ 分为如 A 的 n 类,则在这样的每一类中方程 $xy=z$ 均无解. 这样关于 Smarandach 第 57 个问题我们有估计式 $r\geq n^9$. 于是完成了定理的证明.

利用上面的构造方法我们可以提出下面的:

猜测 对任意给定的正整数 m, 当 n 充分大时有估计式

$$r\geq n^m$$

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993.
[2] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.

On a problem of F. Smarandache

GAO Nan[1], LIU Hong-yan[2]

(1. Department of Mathematics, School of Sciences, Xi′an Shiyou University, Xi′an Shaanxi 710065, China)
(2. Department of Mathematics, Xi′an University of Technology, Xi′an Shaanxi 710048, China)

Abstract Professor F. Smarandache asks us to find the maximum r such that: the set $\{1, 2, \cdots, r\}$ can be partitioned into n classes such that no class contains intgers x, y, z, with $xy=z$. The main purpose of this paper is to give a low bound estimate for r, and prove that $r\geq n^9$.

Keywords partition of an set; function; integer solution; lower bound