DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2007.03.004

第20卷第3期 纺织高校基础科学学报 Vol. 20, No. 3
2007年9月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Sept., 2007

文章编号:1006-8341(2007)03-234-03

关于F. Smarandache函数与除数函数的一个混合均值

吕忠田

(西安医学院 基础课部,陕西 西安 710068)

摘要: $\forall n \in \mathbf{N}_+$,著名的F. Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数$m$使得$n \mid m!$,即就是$S(n)=\min\{m:n\mid m!, m\in \mathbf{N}\}$. 利用初等方法研究一类包含$S(n)$与Dirichlet除数函数$d(n)$的混合均值问题,并给出一个较强的渐近公式.

关键词:F. Smarandache函数;除数函数;混合均值;渐近公式

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

0 引言及结论

$\forall n \in \mathbf{N}_+$,定义函数$S(n)$为最小的正整数$m$使得$n \mid m!$,即就是$S(n)=\min\{m:n\mid m!, m\in \mathbf{N}\}$. 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F. Smarandache教授在文献[1]中提出的,并建议人们研究它的各种性质. 从$S(n)$的定义,很容易推断出如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是$n$的标准素因数分解式,那么

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}. \tag{1}$$

例如$S(1)=1, S(2)=2, S(3)=3, S(4)=4, S(5)=5, S(6)=3, S(7)=7, S(8)=4, S(9)=6, S(10)=5, \cdots\cdots$. 关于$S(n)$的算术性质,有许多学者进行过研究,获得了不少有重要理论价值的研究成果. 例如,Farris Mark和Mitchell Patrick在文献[2]中研究了F. Smarandache函数的有界性问题,得出了函数$S(p^\alpha)$的上下界估计. 即就是证明了

$$(p-1)\alpha+1\leqslant S(p^\alpha)\leqslant(p-1)[\alpha+1+\log_p\alpha]+1.$$

Wang Yongxing在文献[3]中研究了$S(n)$的均值性质,给出了该函数均值的一个渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

文献[4]研究了$S(n)$的值分布问题,获得了下面更深刻的结果:

设$P(n)$表示n的最大素因子,$\forall x\in \mathbf{R}, x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(3/2)x^{3/2}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$表示Riemann zeta-函数.

此外,文献[5]研究了一个包含$S(n)$的方程的可解性,证明了$\forall k\in \mathbf{N}_+, k\geqslant 2$,方程$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$有无穷多组正整数解$(m_2, m_2, \cdots, m_k)$.

随后,有人对文献[5]作了推广和延伸,如文献[6]进一步证实$\forall k\in \mathbf{N}_-, k\geqslant 2$,存在无限多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足不等式

收稿日期:2007-04-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)

作者简介:吕忠田(1965-),男,陕西省凤翔县人,西安医学院讲师. E-mail:a88462694@163.com

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k) > S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k).$$

同样又存在无限多组正整数$(m_1,m_2,\cdots,m_k)$使得

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k) < S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k).$$

文献[7]还证明了更强的结论：即就是如果 $k,m\in\mathbf{N}_+$，满足下面 3 个条件之一

(1)　$k>2$ 和 $m\geqslant 1$ 均为奇数；

(2)　$k\geqslant 5$ 为奇数，$m\geqslant 2$ 为偶数；

(3)　任意偶数 $k\geqslant 4$ 和 $\forall m\in\mathbf{N}_+$.

那么方程 $m\cdot S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$ 有无穷多组正整数解$(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

同时文献[7]还提出，对 $k,m\in\mathbf{N}_+$ 及 $m\geqslant 2$，是否存在无限多组正整数$(m_1,m_2,\cdots,m_k)$满足方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=m\cdot(S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)).$$

本文研究一个包含 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 与 Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 的混合均值问题，并给出一个较强的渐近公式. 具体地说也就是证明下面的

定理 1　设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数. 则 $x>1,x\in\mathbf{R}$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)\cdot d(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中　$d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数，即就是 n 的所有正因数的个数 $d(n)=\sum_{d\mid n}1$，c_i　$(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

2　定理 1 的证明

事实上在和式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)\cdot d(n) \tag{2}$$

中，将所有 $1\leqslant n\leqslant x$ 分为两个集合 A 与 B，其中集合 A 包含所有那些满足存在素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 n；而集合 B 包含区间$[1,x]$中不属于集合 A 的那些正整数. 于是利用性质(1)有

$$\sum_{n\in A}S(n)\cdot d(n)=\sum_{\substack{n\in A\\ p\mid n,\sqrt{n}<p}}S(n)\cdot d(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}S(np)\cdot d(np)=$$

$$\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}2p\cdot d(n)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}2d(n)\sum_{n<p\leqslant x/n}p. \tag{3}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$. 于是利用 Abel 求和公式[9]及素数定理

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中　c_i　$(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数且 $c_1=1$. 有

$$\sum_{n<p\leqslant x/n}p=\frac{x}{n}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\cdot\pi(n)-\int_n^{x/n}\pi(y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1}x}\right), \tag{4}$$

其中　a_i 为可计算的常数. 于是注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2=\frac{\pi^2}{36}$，结合(3)及(4)式可得

$$\sum_{n\in A}S(n)\cdot d(n)=\frac{x^2}{\ln x}\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n^2}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{2a_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)=$$

$$\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{5}$$

其中 b_i 为可计算的常数.

现在讨论集合 B 中的情况，由(1)式及集合 B 的定义知 $\forall n \in B$，当 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 时，有

$$S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant r}\{\alpha_i p_i\} \leqslant \sqrt{n}\ln n. \tag{6}$$

于是由(6)式有

$$\sum_{n \in B} S(n) \cdot d(n) \leqslant \sum_{n \in B} d(n) \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \leqslant \sum_{n \leqslant x} d(n) \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \leqslant x^{3/2}\ln^2 x, \tag{7}$$

其中用到渐近公式 $\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \cdot \ln x + O(x)$. 由集合 A 及 B 的定义并结合(2)，(5)及(7)式有

$$\sum_{n \leqslant x} S(n) \cdot d(n) = \sum_{n \in A} S(n) \cdot d(n) + \sum_{n \in B} S(n) \cdot d(n) = \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i \cdot x^2}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 b_i $(i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数，于是完成了定理 1 的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] FARRIS Mark, MITCHELL Patrick. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Nations Journal, 2002, 13: 37-42.

[3] WANG Yongxing. On the Smarandache function[C]//ZHANG Wenpeng, LI Junzhuang, Liu Duansen. Research on Smarandache Problem In Number Theory. Phoenix: Hexis, 2005: 103-106.

[4] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[5] LIU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[6] JOZSEF Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[7] FU Jing. An equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(4): 83-86.

[8] 潘承洞，潘承彪. 初等数论[M]. 北京：北京大学出版社，2003.

[9] TOM M Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

On a hybrid mean value of the F. Smarandache function and the divisor function

LV Zhong-tian

(Basic Courses Department, Xi'an Medical College, Xi'an 710068, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous F. Smarandache function $S(n)$ defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. That is, $S(n) = \min\{m: n|m!, m \in \mathrm{N}\}$. Using the elementary methods, a hybrid mean value problem involving the F. Smarandache function and the Dirichlet divisor function is studied, and a sharper asymptotic formula is given for it.

Key words: F. Smarandache function; Dirichlet divisor function; hybrid mean value; asymptotic formula

编辑、校对：黄燕萍