第32卷 第5期 河 南 科 学 Vol.32 No.5
2014年5月 HENAN SCIENCE May 2014

文章编号:1004-3918(2014)05-0707-04 DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2014.05.005

伪Smarandache函数的一个下界估计

高 丽, 郝虹斐, 鲁伟阳

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:利用初等方法和组合方法,研究伪Smarandache函数在数列 a^p+b^p 上的下界估计问题. 结果证明了估计式 $Z\left(a^p+b^p\right)\geq 10p$,其中 p 为大于等于17的任意素数, a 与 b 为任意不同的正整数. 给出了伪Smarandache函数在数列 a^p+b^p 上的一个较强的下界估计.

关键词:伪Smarandache函数;下界估计;初等方法;组合方法

中图分类号:O 156.4 文献标识码:A

A Lower Bound Estimate for Pseudo-Smarandache Function

Gao Li, Hao Hongfei, Lu Weiyang

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi China)

Abstract: The elementary and combinational methods were used to study a lower bound estimate problem of Pseudo-Smarandache function on Sequence a^p+b^p. It is proved the Estimate $Z\left(a^p+b^p\right)\geq 10p$, where $p\geq 17$ be any prime, a and b are two positive integers. A lower bound estimate of Pseudo-Smarandache Function on Sequence a^p+b^p is given.

Key words: Pseudo-Smarandache function; lower bound estimate; elementary method; combinational method

对于任意的正整数 n,著名的伪Smarandache函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 $n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.$,即为 $Z(n)=\min\left\{m:m\in\mathbb{N}_+,\ n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\right\}$,其中 $\mathbb{N}_+$ 表示所有的正整数集合. 依据 $Z(n)$ 定义易得出:$Z(1)=1$, $Z(2)=3$, $Z(3)=2$, $Z(4)=7$, $Z(5)=4$, $Z(6)=3$,…. 近年来大量学者对 $Z(n)$ 的相关性质进行了研究,并得到不少有趣的结果. 下界估计这方面,也有学者进行了相关研究,例如文献[4]中,研究了 $S\left(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\right)$ 的下界估计问题,其中 p 为奇素数,并证明了

$$S\left(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\right)\geq 2p+1 .$$

文献[5]中温田丁研究了 $S\left(2^p+1\right)$ 及 $S\left(2^p-1\right)$ 的下界估计问题,当 $p\geq 17$ 为素数时,得到估计式:

$$S\left(2^p+1\right)\geq 10p+1 ,\ S\left(2^p-1\right)\geq 10p+1 .$$

文献[6]对 $S(n)$ 在特殊数列 a^p+b^p 上的下界估计问题进行了研究,证明了:当 a 与 b 为任意不同的正整

收稿日期:2013-11-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271093);陕西省科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZ2013-04);延安大学2014年研究生教育创新计划项目

作者简介:高 丽(1966-),女,陕西绥德人,教授,硕士研究生导师,主要从事数论、函数论方面的研究

郝虹斐(1988-),女,陕西洛川人,硕士研究生,研究方向为数论.

数，$p\geq 17$ 为素数时，有

$$S\left(a^p+b^p\right)\geq 8p+1.$$

由于目前所能查到相关下界估计问题的论文基本为Smarandache函数 $S(n)$ 在某一特殊数列上的下界估计问题的研究，关于伪Smarandache函数 $Z(n)$ 在某一特殊数列上的下界估计问题的研究目前无文献可参考，至少查阅不到，本文受到这一启示，利用初等方法及组合方法，研究了伪Smarandache函数 $Z(n)$ 在特殊数列 a^p+b^p 上的下界估计问题，并得出了一个较强的估计式．本文的结果如下．

定理 设 $p\geq 17$ 为素数，对任意不同的正整数 a 与 b，有估计式

$$Z\left(a^p+b^p\right)\geq 10p.$$

1 相关引理

引理1[6] 设 p 为奇素数，对于任意互素的正整数 a 及 b，有

$$\left(\frac{a^p+b^p}{a+b},a+b\right)=1,p.$$

引理2[1] 对任意素数 p，正整数 α，t 及 n，有

(i) 当 $p\mid n$ 时，有 $Z(n)\geq Z(p)=p-1$；

(ii) 当 $\alpha\leq p$ 时，有 $Z\left(p^\alpha\right)=p^\alpha-1$ 当 $\alpha>p\geq t$ 时，有 $Z\left(p^\alpha\right)\geq Z\left(p^t\right)\geq pt-1$．

2 定理的证明

这节我们将利用初等方法和组合方法给出定理的证明．

由于 a 及 b 为互异的正整数，我们可设 $(a,b)=d$，因而有 $a=a_1\cdot d$，$b=b_1\cdot d$，且满足 $(a_1,b_1)=1$，易得 $a^p+b^p=d^p\cdot\left(a_1^{\ p}+b_1^{\ p}\right)$，由引理2知

$$Z\left(a^p+b^p\right)=Z\left(d^p\cdot\left(a_1^{\ p}+b_1^{\ p}\right)\right)\geq Z\left(a_1^{\ p}+b_1^{\ p}\right).\tag{1}$$

由式(1)不失一般性，可设 $(a,b)=1$，并且 $a\cdot b>1$．

下面我们分两部分进行证明．

首先证明 a^p+b^p 不为 p 的方幂．否则，可假定 $a^p+b^p=p^\tau$，当 $\tau=2$ 时，$a^p+b^p\geq 2^p+1\geq 2p>p^2$，所以 $\tau\geq 3$．由引理1易推得 $a+b=p^k\cdot\upsilon$，$1\leq k\leq\tau-2$，且 $(\upsilon,p)=1$，得

$$p^\tau=a^p+b^p=a^p+\left(p^k\cdot\upsilon-a\right)^p=a^p+\sum_{i=0}^{p}\left(p^k\cdot\upsilon\right)^{p-i}(-a)^i=p^{k+1}\upsilon a^{p-1}+\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i\upsilon^{p-i}p^{k(p-i)}(-1)^ia^i,$$

即有

$$p^\tau-\sum_{i=0}^{p-2}C_p^i\upsilon^{p-i}p^{k(p-i)}(-1)^ia^i=p^{k+1}\upsilon a^{p-1}.$$

由于 $\tau\geq k+2$，因而上式左边可以被 p^{k+2} 整除，但等式右边却不能被 p^{k+2} 整除，矛盾．因此 a^p+b^p 不可能为 p 的方幂．

由上面的结论我们可推出一定存在不等于 p 的素数 q，使得 $q\left|\frac{a^p+b^p}{a+b}\right.$，即

$$a^p+b^p\equiv 0(\bmod q)\text{，或者}\left(a,\bar{b}\right)^p\equiv -1\,(\bmod q),$$

因而有

$$\left(a,\bar{b}\right)^{2p}\equiv 1\,(\bmod q).\tag{2}$$

令 m 为 $\left(a\cdot\bar{b}\right)$ 的指标,因此由式(2)及指标的性质[8-9]知

$$p\left|\varphi(q)=q-1\right.\text{,或者 } q-1=mp\text{.}$$

由于 q 为奇素数,那么 m 一定是偶数,因而可以设

$$q=2kp+1,\ k\in\mathbb{N}_{+}\text{.}\tag{3}$$

于是由式(3)知 $a^{p}+b^{p}$ 有以下四种可能.

(i)除 p 以外,$a^{p}+b^{p}$ 至少含有4个素因子.由式(3)知,此时一定有一个素因子 q,使得 $q=2kp+1$,且 $k\geq 5$,因为当素数 $p\geq 5$ 时,$2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数,此时

$$Z\left(a^{p}+b^{p}\right)\geq Z(q)=q-1=2kp\geq 10p\text{.}$$

(ii)除 p 以外,$a^{p}+b^{p}$ 仅含有3个素因子 q_1,q_2,q_3.由式(3)可设 $q_1=2k_1p+1$,$q_2=2k_2p+1$ 及 $q_3=2k_3p+1$,注意到 $p\geq 17$ 时,$2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数,$8p+1$ 和 $4p+1$ 也不可能同时为素数,则至少存在一个素因子,不妨设为 q_3,此时 $q_3=2k_3p+1\geq 10p+1$,$k_3\geq 5$,则一定有

$$Z\left(a^{p}+b^{p}\right)\geq Z(q_3)=q_3-1=2k_3p\geq 10p\text{.}$$

(iii)除 p 以外,$a^{p}+b^{p}$ 仅含有2个素因子.由式(3)知,$a^{p}+b^{p}$ 不可能同时包含素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$,也不可能同时包含素因子 $8p+1$ 和 $4p+1$,因而由(3)式及 $Z(n)$ 的性质,可以考虑以下形式:

$$a^{p}+b^{p}=p^{\alpha}(2p+1)^{\beta}(6p+1)^{\gamma}\ ;$$

$$a^{p}+b^{p}=p^{\alpha}(4p+1)^{\beta}(6p+1)^{\gamma}\ ;$$

$$a^{p}+b^{p}=p^{\alpha}(2p+1)^{\beta}(8p+1)^{\gamma}\text{.}$$

若 $a^{p}+b^{p}=p^{\alpha}(2p+1)^{\beta}(6p+1)^{\gamma}$ 成立,当 $\beta\geq 5$ 或 $\gamma\geq 2$ 时,由引理2知

$$Z\left(a^{p}+b^{p}\right)\geq Z\left((2p+1)^{\beta}\right)=(2p+1)^{\beta}-1\geq 5(2p+1)-1\geq 10p\text{,}$$

或者

$$Z\left(a^{p}+b^{p}\right)\geq Z\left((6p+1)^{\gamma}\right)=(6p+1)^{\gamma}-1\geq 2(6p+1)\geq 10p\text{.}$$

当 $1\leq\beta\leq 4$ 或 $\gamma=1$,现在证这种情况下,当 $p\geq 17$ 时,$a^{p}+b^{p}$ 不可能含有 p 的方幂,若不然,当 $\alpha\geq 2$ 时,由 $p\left|a+b\right.$,设 $a+b\equiv p^{k}\cdot\mu$,$(p,\mu)=1$,由引理1可得 $k=\alpha$ 或 $k=\alpha-1$,显然 $a^{p}+b^{p}=p^{\alpha}(2p+1)^{\beta}(6p+1)^{\gamma}$ 且 $1\leq\beta\leq 4$,$k=\alpha$ 不可能.因为 $p^{\alpha+1}\left|\ a^{p}+b^{p}\right.$,而 $k=\alpha-1$,则有 $a+b\equiv p^{\alpha-1}\cdot\mu$ 可知

$$p^{\alpha}(2p+1)^{\beta}(6p+1)=a^{p}+b^{p}\geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{p}\geq 2\left(\frac{p^{\alpha-1}}{2}\right)^{p}\text{,}$$

当素数 $p\geq 17$,$1\leq\beta\leq 4$,$\alpha\geq 2$,$\gamma=1$ 时,显然上式不成立.

当 $\alpha=1$ 时,由于 $a+b\equiv a^{p}+b^{p}\equiv 0(\operatorname{mod}p)$,有 $p^{2}\left|\ a^{p}+b^{p}\right.$,是不可能的,所以 $a^{p}+b^{p}$ 此时不含素因子 p.于是有

$$(2p+1)^{\beta}(6p+1)=a^{p}+b^{p}\geq 2^{p}+1\text{,}$$

其中 $1\leq\beta\leq 4$,$p\geq 17$,通过计算得出矛盾.

同理可证素数 $p\geq 17$ 时,$a^{p}+b^{p}=p^{\alpha}(2p+1)^{\beta}(8p+1)^{\gamma}$ 及 $a^{p}+b^{p}=p^{\alpha}(4p+1)^{\beta}(6p+1)^{\gamma}$,且 $\beta=\gamma=1$ 时不成立.而当 $\beta\geq 2$ 或 $\gamma\geq 2$ 时,此时由 $Z(n)$ 的性质可得 $Z\left(a^{p}+b^{p}\right)\geq 10p$ 成立.

(iv)除 p 以外，a^p+b^p 仅含有1个素因子．因而由式(3)及 $Z(n)$ 的性质，可以考虑以下四种形式：

$$a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta\text{；}$$

$$a^p+b^p=p^\alpha(4p+1)^\beta\text{；}$$

$$a^p+b^p=p^\alpha(6p+1)^\beta\text{；}$$

$$a^p+b^p=p^\alpha(8p+1)^\beta.$$

若 $a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta$ 成立，当 $\beta\ge 5$ 时，由引理2有

$$Z\left(a^p+b^p\right)\ge Z\left((2p+1)^\beta\right)=(2p+1)^\beta-1\ge 5(2p+1)-1\ge 10p.$$

当 $1\le\beta\le 4$ 时，由情况(iii)可知 a^p+b^p 中不可能含有素因子 p 的方幂，所以当 $\alpha\ge 1$ 时，$a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta$ 且 $1\le\beta\le 4$ 不成立．同理可得当 $\alpha=0$ 时，通过计算 $a^p+b^p=(4p+1)^\beta$ 且 $1\le\beta\le 4$ 不成立．

同理可证：$a^p+b^p=p^\alpha(4p+1)^\beta$ 或 $a^p+b^p=p^\alpha(6p+1)^\beta$ 或 $a^p+b^p=p^\alpha(8p+1)^\beta$ 时结论成立，于是定理得证．

参考文献：

[1] Kashihara Kenichiro. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. USA：Erhus University Press，1996.

[2] Majumdar A A K. A note on the Pseudo-Smarandache function [J]. Scientia Magna，2006，2(3)：1-25.

[3] Lou Yuanbing. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna，2007，3(4)：48-50.

[4] Le Mohua. A low bound for $S\left(2^{p-1}\left(2^p-1\right)\right)$ [J]. Smarandache Notion Journal，2001，12(1/2/3)：217-218.

[5] 温田丁. Smarandache函数的一个下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(3)：413-416.

[6] 李粉菊，杨畅宇. 关于Smarandache函数的一个下界估计[J]. 西北大学学报：自然科学版，2011，41(3)：377-379.

[7] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York：Springer-Verlag，1976.

[8] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

(编辑　康　艳)