第 41 卷第 24 期 数学的实践与认识 Vol.41, No. 24
2011年 12 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Dec., 2011

教学园地

两个 Smarandache 复合函数的混合均值公式

黄 炜

(宝鸡职业技术学院 基础部, 陕西 宝鸡 721013)

摘 要: 对任意正整数 n, Smarandache 函数 $U(n)$、$V(n)$ 定义为: $U(1)=V(1)=1$, $n>1$ 时, 若它的标准分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, $U(n)=\max\limits_{1\le i\le r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$; $V(n)=\min\limits_{1\le i\le r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$. 研究了这两 Smarandache 函数 $U(n)$ 与 $V^m(n)$ 的值分布, 并用初等方法及素数分布定理得到了几个较强的渐近公式.

关键词: Smarandache 函数; 均值; 渐近公式

1 引言及结论

对任意正整数 n,Smarandache$U(n)$、$V(n)$ 函数定义为: $U(1)=V(1)=1$. 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准素因子分解式时;

$$U(n)=\max_{1\le i\le r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$$
$$V(n)=\min_{1\le i\le r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$$

这两个数列的前几项分别为 $1,2,3,4,5,3,7,6,6,5,11,4,13,7,5,6,7,6,\cdots$; $1,2,3,4,5,2,7,6,6,2,11,3,13,2,3,6,7,2,\cdots$

关于函数 $U(n),V(n)$ 的性质, 文献 [1-3] 进行了研究, 获得了许多有趣的结果. 文献 [2] 中研究了 $V(n)$ 的值分布性质, 并证明了: $\sum\limits_{n\le x}V(n)=\frac{1}{2}x^2\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x})$.

本文用初等方法, 结合素数函数 $\pi(x)$ 的解析性质, 研究了 $U(n)$ 及 $V^m(n)$ 的均值分布性质, 并给出了几个有趣的渐近公式, 即就是证明以下结论:

定理 1 设 r 是给定任意正整数, 对于任意实数 $x>1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n\le x}U(n)=x^2\sum_{i=1}^{r}\frac{f_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{r+1}x}\right)$$

其中 $f_i(i=1,2,3,\cdots,k)$, 是可计算常数且 $f_1=\frac{\pi^2}{12}$.

定理 2 设 r,m 是给定任意正整数, 对于任意整数 $x>1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n\le x}V^m(n)=\frac{1}{m+1}x^{m+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\Big(\frac{x^{m+1}}{\ln^{r+1}x}\Big)$$

收稿日期: 2009-06-16
资助项目: 国家自然科学基金 (10671155); 陕西省自然科学基金项目 (SJ08A28)

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

特别的当 $m=2$ 时, 我们有:

推论 1 对于任意整数 $x>1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n\le x}V^2(n)=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\Big(\frac{x^3}{\ln^{r+1}x}\Big)$$

其中 $a_i(i=1,2,3,\cdots r)$ 是可计算常数.

2 定理 1 的证明

对于任意的 $n\ge 1$, 把区间 $(1,x]$ 的所有正整数 n 分成如下四个部分:

A 是 $(1,x]$ 中: 恰好有一个素因子 p 满足 $n=mp\quad p>\sqrt[3]{n}$ 使得 m 的所有素因子 q 满足 $q<\sqrt[3]{n}$ 的集合; B 是 $(1,x]$ 中: 有一个素因子 p 满足 $n=mp^2\quad p>\sqrt[3]{n}>m$ 的整数 n 的集合; C 是 $(1,x]$ 中: 有两个素因子 p_1,p_2 满足 $n=mp_1p_2,p_2>p_1>\sqrt[3]{n}>m$ 的 p_1 、p_2 及 m 两两互素的整数 n 的集合; D 是 $[1,x]$ 中满足所有的素因子 p, 满足 $p\le\sqrt[3]{n}$ 的整数 n 的集合. 由 A、B、C 及 D 的定义, 显然有

$$\sum_{n\le x}U(n)=\sum_{n\in A}U(n)+\sum_{n\in B}U(n)+\sum_{n\in C}U(n)+\sum_{n\in D}U(n)$$

下面我们逐一计算:

i) 当 $n\in A$ 时, $n=mp$ 且 m 的所有素因子 q 满足 $q<\sqrt[3]{n}$, 故有: $p(n)\le F(n)$, $U(n)\le\sqrt[3]{n}\ln n$.

由 Abel 求和公式以及素数分布定理 (参阅文献 [5] 中第三章定理 2):

$$\pi(x)=\sum_{p\le n}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O(\frac{x}{\ln^{k+1}x}) \tag{1}$$

其中 $a_i(i=1,2,3,\cdots,k)$. 为可计算的常数且 $a_1=1$. 并注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}U(n)=\sum_{n\in A}P(n)&=\sum_{\substack{mp\le x\\ p>\sqrt{x}}}p=\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}\le p\le\frac{x}{m}}p\\ &=\sum_{m<\sqrt{x}}\Big(\frac{x}{m}\pi\Big(\frac{x}{m}\Big)-\int_2^{\frac{x}{m}}\pi(y)\mathrm{d}y+O\Big(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\Big)\Big)\\ &=\frac{x^2}{2}\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i}{\ln^i\frac{x}{m}}\frac{1}{m^2}+O\Big(\frac{x^2}{\ln^{r+1}x}\Big)\\ &=\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i}{\ln^i x}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}-\sum_{m\ge\sqrt{x}}\frac{1}{m^2}\Big)+O\Big(\frac{x^2}{\ln^{r+1}x}\Big)\\ &=\frac{\pi^2}{12}x^2\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i(m)}{\ln^i x}+O\Big(\frac{x^2}{\ln^{r+1}x}\Big)\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $b_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ 表示与 m 有关的可计算常数, $\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta 函数.

ii) 当 $n\in B$ 时, 此时有 $p>\sqrt[3]{n}>m$ 则有 $U(n)=2p$, p 为素数, 从而有

$$\sum_{n\in B}U(n)=2\sum_{n\in B}P(n)=2\sum_{\substack{mp^2\le x\\ m<p\\ \sqrt[3]{x}<p<\sqrt{x}}}p\le 2\sum_{m\le\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p\le\sqrt{\frac{x}{m}}}p$$

$$\ll 2\sum_{m\leq\sqrt[3]{x}}\sqrt{\frac{x}{m}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}\ll\frac{x}{\ln x} \tag{3}$$

iii) 当 $n\in C$ 时, 此时有 $n=mp_1p_2, p_2>p_1>\sqrt[3]{n}>m$, 如果 $m>p_1<\sqrt[3]{n}$ 这属于 i) 的情况, 如果 $m<p_1<p_2<\sqrt[3]{n}$ 这属于 ii) 的情况, 则有 $U(n)=p_2$, 从而有

$$\sum_{n\in C}U(n)=\sum_{n\in C}P(n)=\sum_{\substack{mpp_1\leq x\\ \sqrt[3]{x}<p_1<p<\sqrt{x}}}p=\sum_{m\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p<\frac{x}{mp_1}}p$$

$$\ll\sum_{m\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{k<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\frac{x}{mp_1}\cdot\frac{\frac{x}{mp_1}}{\ln\frac{x}{mp_1}}\ll\sum_{m\leq\sqrt[3]{x}}\sum_{k<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\frac{x^2}{m^2p_1^2\ln x}$$

$$\ll\sum_{m\leq\sqrt[3]{x}}\frac{x^2}{m^2\ln x}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \tag{4}$$

iv) 当 $n\in D$ 时, 此时 $p\leq\sqrt[3]{n}$ 及 $P(n)\leq U(n)$, $U(n)\leq\sqrt[3]{n}\ln n$ 可类似的得到

$$\sum_{n\in D}U(n)\ll\sum_{n\leq x}n^{\frac{1}{3}}\ln n\ll x^{\frac{1}{3}}\ln x \tag{5}$$

结合 i)、ii)、iii)、iv) 我们立即得到

$$\sum_{n\leq x}U(n)=x^2\sum_{i=1}^{r}\frac{f_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{r+1}x}\right)$$

其中 $f_i(i=1,2,3,\cdots,k)$, 是可计算常数且 $f_1=\frac{\pi^2}{12}$.

3 定理 2 的证明

对于任意的 $n\geq 1$, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准素因子分解式把区间 $(1,x]$ 的所有正整数 n 分成如下两个部分:

$A:\omega(n)=1$, 即就是说所有的 $n=p^\alpha\leq x$ 的正整数, 其中 p 是素数, α 是任意正整数.

$B:\omega(n)\geq 2$, 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因数个数.

由 A 和 B 的定义我们有:

$$\sum_{n\leq x}V(n)^m=1+\sum_{x\in A}V(n)^m+\sum_{x\in B}V(n)^m$$

下面分类计算: i) 当 $n\in A$ 时, 此时可设 $n=p^\alpha$, 则 $V(n)=\alpha\cdot p$, 我们有

$$\sum_{x\in A}V(n)^m=\sum_{p\leq x}V^m(n)+\sum_{\substack{p^\alpha\leq x\\ \alpha\geq 2}}V^m(p^\alpha)=\sum_{p\leq x}p^m+\sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha^m\cdot p^m \tag{6}$$

由素数分布定理及 Abel 恒等式得

$$\sum_{p\leq x}p^m=\int_{\frac{2}{3}}^{x}t^m\mathrm{d}\pi(t)=x^m\cdot\pi(x)-m\int_{\frac{2}{3}}^{x}t^{m-1}\pi(t)\mathrm{d}t$$

$$=x^m\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O(\frac{x}{\ln^{k+1}x})\Big)-m\int_{\frac{2}{3}}^{x}t^{m-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot t}{\ln^i t}+O(\frac{t}{\ln^{k+1}t})\Big)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{m+1}x^{m+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\Big(\frac{x^{m+1}}{\ln^{r+1}x}\Big) \tag{7}$$

$$\sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha^m\cdot p^m \ll \sum_{2<\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq\sqrt{x}}\alpha^m p^m$$

$$\ll \sum_{2<\alpha\leq\ln x}\alpha^m\cdot(\sqrt{x})^m\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}} \ll x^{\frac{m+1}{2}}\cdot\ln^{m-1}x \qquad (8)$$

结合 (6)、(7)、和 (8) 式可得

$$\sum_{x\in A}V(n)^m = \frac{1}{m+1}x^{m+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O(\frac{x^{m+1}}{\ln^{r+1}x})$$

ii) 当 $n\in B$ 时, 此时可设 $V(n)=\alpha\cdot p$, $n=mp^\alpha$, 且 $p>p(n)$, 从而有

$$\sum_{x\in B}V(mp^\alpha)^m=\sum_{x\in B}(\alpha\cdot p)^m \ll \sum_{1\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\sum_{p<m\leq\frac{x}{p^\alpha}}\alpha^m\cdot p^m$$

$$\ll \sum_{1\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\sum_{m\leq\frac{x}{p^\alpha}}\alpha^m\cdot p^m\cdot\frac{x}{p^\alpha} \ll \sum_{1\leq\alpha\leq\ln x}\alpha^m\sum_{p\leq x^{\frac{1}{2}}}p^m\leq x^m\cdot\ln^m x$$

结合 i) 和 ii) 我们立即得到 $\sum\limits_{n\leq x}V^m(n)=\frac{1}{m+1}x^{m+1}\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O(\frac{x^{m+1}}{\ln^{r+1}x})$.

其中 $a_i(i=1,2,3,\cdots k)$ 是常数, $a_1=1$.

参考文献

[1] Xu Z F. On the value distribution of the Smarandache function[J]. Acta Mathematics Sinica, Chinese Series, 2006, 49(5): 1009-1012.

[2] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 235-238.

[3] 贺艳峰. 两个数论函数的混合均值公式 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(4): 477-479

[4] Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer -Verlag, 1976.

[5] Pan C D, Pan C B. Fou Dation of Analytic Number Theory[M]. Beijing: Science Press' ', 1997(in Chinese).

Two Hybrid Mean Value Formulas of Involving Smarandache Functions

HUANG Wei

(Department of basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, China)

Abstract: for any positive integer n, define $U(1)=V(1)=1$ And $U(n)=\max\limits_{1\leq i\leq r}\{\alpha_1\cdot p_1, \alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$ and $V(n)=\min\limits_{1\leq i\leq r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$ if $n>1$, where $\alpha_1,p_1,\alpha_2,p_2,\cdots,\alpha_r,p_r$ satisfy $n\doteq p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ which decomposes n into prime powers, The main purpose of this paper is using the elementary methods and the prime distribution theory to study the value distribution properties of the Smarandache function $U(n)$ and $V^m(n)$, and give two sharper asymptotic formulae for it.

Keywords: Smarandache function; Value distribution; asymptotic formula