文章编号: 1003-2843(2007)06-1281-03

三次 Smarandache 组合数列的整除性

樊旭辉, 周航, 韩卫国
(武警工程学院基础部, 陕西西安 710086)

摘 要: 通过对三次 Smarandache 组合数列整除性的研究, 得出在三次 Smarandache 组合数列的连续项中第 1、2、3 项两两互素.

关键词: Smarandache 组合数列; 整除; 同余
中图分类号: O156.4 文献标识码: A

1 引言

设 r 是正整数且 r>1, $SCS(r)=\{a(r,n)\}_{n=1}^{\infty}$ 表示 r 次 Smarandache 组合数列, 其中当$n\le r$时$a(r,n)=n$, 当 n>r 时 $a(r,n)$ 的值等于在数列$\{a(r,n)\}_{n=1}^{\infty}$的前 n-1 项中任取 r 项作乘积再作和. Murthy 在文[1]中提出一个非常重要的问题: r 次 Smarandache 组合数列 SCS(r)中有多少组两两互素的连续项.

乐茂华在文[2]中对二次 Smarandache 组合数列整除性做了研究, 得到如下的结论:

1) 对于任意的正整数 n, 同余式$a(2,n+1)\equiv 0(\bmod a(2,n))$成立.

2) 二次 Smarandache 组合数列 SCS(2)中连续且两两互素的项只有第 1、2 项.

本文通过对三次 Smarandache 组合数列整除性的研究, 得出在三次 Smarandache 组合数列的连续项中第 1、2、3 项两两互素.

2 主要结果

引理 设$r,r_1,r_2,\cdots r_n$为正整数, $b_1,b_2,\cdots b_n$为任意实数, 则

$$(b_1+b_2+\cdots+b_n)^r=\sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_n=r\\0\le r_i\le r}}\frac{r!}{r_1!r_2!\cdots r_n!}b_1^{r_1}b_2^{r_2}\cdots b_n^{r_n}\,(i=1,2,\cdots n)\,. \tag{1}$$

证明 当$n=1$时 (1) 式显然成立;

设当$n\le k$时 (1) 式成立. 则当$n=k+1$时

$$\sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_k+r_{k+1}=r\\0\le r_i\le r}}\frac{r!}{r_1!r_2!\cdots r_k!r_{k+1}!}b_1^{r_1}b_2^{r_2}\cdots b_k^{r_k}b_{k+1}^{r_{k+1}}$$

收稿日期: 2007-08-25
作者简介: 樊旭辉(1975-), 男, 武警工程学院基础部讲师.
通信作者: 周航(1975-), 男, 武警工程学院基础部讲师.

$$=\sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_k=r\\0\le r_i\le r}}\frac{r!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}b_1^{r_1}b_2^{r_2}\cdots b_k^{r_k}+C_r^1\sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_k=r-1\\0\le r_i\le r-1}}\frac{(r-1)!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}b_1^{r_1}b_2^{r_2}\cdots b_k^{r_k}b_{k+1}$$

$$+C_r^2\sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_k=r-2\\0\le r_i\le r-2}}\frac{(r-2)!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}b_1^{r_1}b_2^{r_2}\cdots b_k^{r_k}b_{k+1}^{\ \ 2}+\cdots+C_r^{r-1}\sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_k=1\\0\le r_i\le 1}}\frac{1}{r_1!r_2!\cdots r_k!}b_1^{r_1}b_2^{r_2}\cdots b_k^{r_k}b_{k+1}^{\ \ r-1}+b_{k+1}^{\ \ r}$$

$$=(b_1+b_2+\cdots+b_k)^r+C_r^1(b_1+b_2+\cdots+b_k)^{r-1}b_{k+1}+C_r^2(b_1+b_2+\cdots+b_k)^{r-2}b_{k+1}^{\ \ 2}+\cdots$$

$$+C_r^{r-1}(b_1+b_2+\cdots+b_n)b_{k+1}^{\ \ r-1}+b_{k+1}^{\ \ r}$$

$$=\sum_{i=0}^{r}C_r^i(b_1+b_2+\cdots+b_k)^{r-i}b_{k+1}^{\ \ i}=(b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1})^r.$$

因此，当 n=k+1 时（1）式成立.

由归纳法原理知引理成立.

定理　设 n 为正整数,当 n>3 时同余式 $a(3,n+1)\equiv 0(\bmod a(3,n))$ 成立.

证明　记 $a(3,n)=b(n)$，由 SCS(3)的定义可得 $b(1)=1$、$b(2)=2$、$b(3)=3$.

当 $n>3$ 时，由(1)式得

$$(b(1)+b(2)+\cdots+b(n-1))^3=\sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}=3,\\0\le r_i\le 3}}\frac{\mathrm{r}!}{\mathrm{r}_1!+r_2!+\cdots+r_{n-1}!}\mathrm{b}(1)^{\mathrm{r}_1}\cdot\mathrm{b}(2)^{\mathrm{r}_2}\cdots\mathrm{b}(\mathrm{n}-1)^{\mathrm{r}_{\mathrm{n}-1}}\ (\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}-1)$$ 即

$$(b(1)+b(2)+\cdots+b(n-1))^3=\sum_{i=1}^{n-1}b(i)^3+6\sum_{1\le i<j<k\le n-1}b(i)b(j)b(k)+3\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n-1}b(j)b(i)^2. \tag{2}$$

由（2）得

$$\sum_{1\le i<j<k\le n-1}b(i)b(j)b(k)=\frac{1}{6}((\sum_{i=1}^{n-1}b(i))^3-\sum_{i=1}^{n-1}b(i)^3-3\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n-1}b(j)b(i)^2). \tag{3}$$

由(3)式及(3)的定义可得:

$$b(n)=\sum_{1\le i<j<k\le n-1}b(i)b(j)b(k)=\frac{1}{6}((\sum_{i=1}^{n-1}b(i))^3-\sum_{i=1}^{n-1}b(i)^3-3\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n-1}b(j)b(i)^2). \tag{4}$$

所以

$$b(n)-b(n-1)$$
$$=\frac{1}{6}((\sum_{i=1}^{n}b(i))^3-(\sum_{i=1}^{n-1}b(i))^3-\sum_{i=1}^{n}b(i)^3+\sum_{i=1}^{n-1}b(i)^3-3\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}b(j)b(i)^2+3\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n-1}b(j)b(i)^2)$$
$$=b(n)\sum_{1\le i<j\le n-1}b(i)b(j).$$

由同余的基本性质得:

$$b(n+1) \equiv b(n) \equiv 0(\bmod b(n))$$

即
$$a(3,n+1) \equiv 0(\bmod a(3,n)) .$$

由该定理容易得如下推论:

推论　在三次 Smarandache 组合数列 SCS(3)中的连续项中第 1、2、3 项两两互素.

参考文献:

[1] MURTHY A. Some new Smarandache sequences, functions and partitions[J]. marandache Nations. 2000, 1:179-183.

[2] LE MAOHUA. The divisibility of the Smarandache combinatorial sequence of degree two[J]. Samarandache Notions. 2004, 14: 153-155.

[3] TOM M.Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag,1976.

The divisibility of the Smarandache combinatorial sequence of degree three

FAN Xu-hui, ZHOU Hang, HAN Wei-guo

(Foundation Department, Engineering College of Armed Police Forces, Xi`an 710086, P. R. C.)

Abstract: In this paper, it is proved that the consecutive terms 1,2,3 of the Smarandache combinatorial sequence of degree three are pairwise coprime.

Key words: Smarandache combinatorial sequence; divisibility; congruence

Chinese Library Classification: O156.4　　**Document Code:** A