DOI:10.14018/j.cnki.cn13-1085/n.2011.32.134

一类新的反 Smarandache 几何级数周期行列式

A Class of Anti Smarandache Geometric Progression Cycle Determinant

段卫国 Duan Weiguo

（渭南师范学院数学与信息科学学院，渭南 714000）

（College of Mathematics and Information Science，Weinan Normal University，Weinan 714000，China）

摘要：本文定义了一类新的反 Smarandache 几何级数周期行列式，并利用初等数论的方法和行列式的性质，对这类行列式进行了研究，给出了它们的通项公式。

Abstract: In this paper, we defined a new classes anti Smarandache geometric progression cycle determinants, and using the methods of the nature elementary theory and determinant properties, studied these determinants, and gave general term formula.

关键词：几何级数周期行列式；通项公式

Key words: the geometric progression cycle determinants；the general term formula

中图分类号：G42　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1006-4311（2011）32-0211-01

1 引言及结论

在文献[1]-[5]中 Murthy 等人定义了一类 Smarandache 周期行列式序计算了其通项公式是，在本文中，我们将定义了一类新的反 Smarandache 几何级数周期行列式，并利用行列式的基本性质，研究并给出它的通项公式。

定义 1 对于任何正整数 n，设 a,q 为复数，有 $n\times n$ 行列式序列 $FSJH(n;a,q)$，称为关于数 (a,q) 的 n 次对称反 Smarrandache 几何级数周期行列式，其定义如下：

$$FSJH(n;a,q)=\begin{vmatrix} aq^{n-1} & aq^{n-2} & \cdots & aq & a \\ a & aq^{n-1} & \cdots & aq^{2} & aq \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ aq^{n-3} & aq^{n-4} & \cdots & aq^{n-1} & aq^{n-2} \\ aq^{n-2} & aq^{n-3} & \cdots & a & aq^{n-1} \end{vmatrix}$$

定义 2 对于任何正整数 n，设 a,q 为复数，有 $n\times n$ 行列式序列 $SFSJH(n;a,q)$，称为关于数 (a,q) 的 n 次双对称反 Smarrandache 几何级数周期行列式序列，其定义如下：

$$SFSJH(n;a,q)=\begin{vmatrix} aq^{n-1} & aq^{n-2} & \cdots & aq & a \\ aq^{n-2} & aq^{n-1} & \cdots & aq^{2} & aq \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ aq & aq^{2} & \cdots & aq^{n-1} & aq^{n-2} \\ a & aq & \cdots & aq^{n-2} & aq^{n-1} \end{vmatrix}$$

对于上述定义的两个新的几何级数周期行列式，我们在 Murthy 和 A.A.K.Majumdar 等人的研究基础上，利用初等数论的研究方法结合行列式的相关性质对其进行了研究，得到了以下结论：

定理 对于任何正整数 n，设 a,q 为复数，则有

$$FSJH(n;a,q)=a^{n}(q^{n}-1)^{n-1} \tag{1}$$

$$SFSJH(n;a,q)=a^{n}q^{n(n-2)}(q^{2}-1)^{n} \tag{2}$$

2 相关引理

设 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 是 n 个复数，有 $n\times n$ 行列式：

$$PSH(b_1,b_2,\cdots b_n)=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_n & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_3 & b_4 & \cdots & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_n & b_1 \end{vmatrix}=\prod_{x^n=1}(b_1+b_2x+\cdots+b_nx^{n-1})$$

其的证明见文献[3]。

3 定理的证明

对于 (1) 式采用引理来证明。令行列式 $FSJH(n;a,q)$ 中的 $aq^{n-1}=b_1,aq^{n-2}=b_2\cdots a=b_n$，则 $FSJH(n;a,q)=PSH(aq^{n-1},aq^{n-2},\cdots,a)=\prod\limits_{x^n=1}(aq^{n-1}+aq^{n-2}x+\cdots+ax^{n-1})=a^n\prod\limits_{x^n=1}(q^{n-1}+q^{n-2}x+\cdots+x^{n-1})$

如果 $x^n=1$，则 $(q^{n-1}+q^{n-2}x+\cdots+x^{n-1})(q-x)=q^n-1$，由于

$$\prod_{x^n=1}(q-x)=q^n\prod_{x^n=1}(1-x/q)=q^n-1$$

则 $\prod\limits_{x^n=1}(q^{n-1}+q^{n-2}x+\cdots+x^{n-1})=\dfrac{\prod\limits_{x^n=1}(q^{n-1}+q^{n-2}x+\cdots+x^{n-1})(q-x)}{\prod\limits_{x^n=1}(q-x)}=(q^n-1)^{n-1}$，所以 $FSJH(n;a,q)=a^n(q^n-1)^{n-1}$

定理中 (1) 式得证。

对于 (2) 式采用直接法来证明。令

$$H=\begin{vmatrix} q^{n-1} & q^{n-2} & \cdots & q & 1 \\ q^{n-2} & q^{n-1} & \cdots & q^{2} & q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q & q^{2} & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ 1 & q & \cdots & q^{n-2} & q^{n-1} \end{vmatrix}$$

则 $SFSJH(n;a,q)=a^nH$，所以只需求行列式 H 即可。

把 H 的第 2 行提出公因子 q，第 2 行的 -1 倍加到第 1 行，然后按第 1 行展开，得

$$H=q(q^{n-1}-q^{n-3})\begin{vmatrix} q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & q & 1 \\ q^{n-2} & q^{n-1} & \cdots & q^{3} & q^{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q^{2} & q^{3} & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ q & q^{2} & \cdots & q^{n-2} & q^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=q(q^{n-1}-q^{n-3})q^2(q^{n-2}-q^{n-4})\begin{vmatrix} q^{n-3} & q^{n-4} & \cdots & q & 1 \\ q^{n-2} & q^{n-1} & \cdots & q^{4} & q^{3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q^{3} & q^{4} & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ q^{2} & q^{3} & \cdots & q^{n-2} & q^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=q(q^{n-1}-q^{n-3})q^2(q^{n-2}-q^{n-4})\cdots q^{n-2}(q^2-1)\begin{vmatrix} q & 1 \\ q^{n-2} & q^{n-1} \end{vmatrix}=q^{n(n-2)}(q^2-1)^n$$

所以 $SFSJH(n;a,q)=a^nH=a^nq^{n(n-2)}(q^2-1)^n$，定理中 (2) 式得证。

对于定义 2 可以进行推广到更一般的情况。设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个复数，有 $n\times n$ 行列式 $PSSH(a_1,a_2,\cdots a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}$

其值的计算还是一个未解决的问题，有待我们进一步探索。

参考文献：

[1]Amarnath Murthy.Smarandache Determinant Sequence[J].Smarandache Notions Journal, 2001,(12):275-278.

[2]A. A. K. Majumdar. On some Smarandache determinant sequences[J]. Scientia Magna.2008,4(2):80-95.

[3]Maohua L. Two classes of Smarandache determinants[J].Scientia Magna, 2006,2(1):20-25.

[4]杨长恩.论两类 Smarandache 行列式的推广[J].咸阳师范学院学报, 2010,25(4):1-3.

[5]杨长恩.Fibonacci 数列与对角型行列式[J].咸阳师范学院学报,2007,22(4):3-5.

基金项目：渭南师范学院项目（11YKZ030）；陕西省教育厅项目（09JK430）。

作者简介：段卫国（1981-），男，陕西临潼人，渭南师范学院数学与信息科学学院数学系讲师，硕士，研究方向为数论。