DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2013.03.018

第26卷第3期 纺织高校基础科学学报 Vol.26,No.3
2013年9月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Sept.,2013

文章编号:1006-8341(2013)03-0328-04

一类包含 Smarandache 对偶函数方程的解

董小茹,杨瑞妮

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要:$\forall n\in \mathbf{N}_+$,Smarandache 对偶函数 $s^*(n)$ 定义为最大的正整数 m,使得 $m!\mid n$. 利用初等数论的方法,研究了 Smarandache 对偶函数方程 $\sum\limits_{d\mid n}\dfrac{1}{s^*(d)}=\omega(n)\Omega(n)$ 的可解性,并获得了该方程的所有正整数解.

关键词:Smarandache 对偶函数;方程;正整数解

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

1 引言及结论

$\forall n\in \mathbf{N}_+$,著名的 Smarandache 函数 $s(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 $n\mid m!$,即 $s(n)=\min\{m\mid m\in \mathbf{N}_+,n\mid m!\}$. 1991 年,美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache 在文献[1]中建议人们研究它的性质. 许多专家学者对此问题进行研究,得到很多有价值的结论. 文献[2]中引入 $s(n)$ 的对偶函数. 对于 $s(n)$ 的对偶函数 $s^*(n)$ 定义为最大的正整数 m,使得 $m!\mid n$,即 $s^*(n)=\max\{m\mid m\in \mathbf{N}_+,m!\mid n\}$. 因此 $s^*(n)$ 的前几项为 $s^*(1)=1,s^*(2)=2,s^*(3)=1,s^*(4)=2,s^*(5)=1,\cdots$. 由 $s^*(n)$ 的定义容易推出:当 n 为奇数时,$s^*(n)=1$;当 n 为偶数时,$s^*(n)\geqslant 2$. 薛西峰在文献[4]中证明了函数方程 $\sum\limits_{d\mid n}s^*(d)=n$ 的正整数解为 $n=1,12$. 陈斌在文献[5]中证明了函数方程 $\sum\limits_{d\mid n}\dfrac{1}{s^*(d)}=k\Omega(n)(k=2)$ 的所有正整数解. 这些都是对 k 为某一具体数字的研究,但是 k 变动时还没有人研究. 本文利用初等方法研究了一类包含 F. Smarandache 对偶函数方程的可解性. 具体考虑了以下问题:是否 $\exists n\in \mathbf{N}_+$ 满足方程

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=\omega(n)\Omega(n). \qquad (*)$$

其中 $\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因子的个数,包括重数,$\omega(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的个数. 即当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 的标准形式时,$\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$,$\omega(n)=k$.

定理 1[3] 方程 $\sum\limits_{d\mid n}\dfrac{1}{s^*(d)}=\omega(n)\Omega(n)$ 的解有如下几种:

(1) 当 n 为奇数时,方程的解的形式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2$,$n=p_1^2p_2p_3$,$n=p_1p_2p_3p_4$;

(2) 当 n 为偶数时,方程的解的形式为 $n=2^2$,$n=2^6p_1^4$,$n=2^4p_1^5$,$n=2^3p_1^7$,$n=2^4p_1^3p_2$,$n=2^2p_1p_2^5$,

收稿日期:2013-05-11

基金项目:陕西省教育厅科学研究项目(11JK0470)

通讯作者:董小茹(1985-),女,陕西省渭南市人,西北大学硕士研究生. E-mail:znxts@foxmail.com

$n=2p_1^3p_2^2, n=2^2p_1p_2p_3^2, n=2^4 3^{30}, n=2^6 3^{12}; n=2^2\cdot 3p_2^8, n=2^2\cdot 3^3p_2^2$,其中 $p_i>3$.

2　定理 1 的证明

当 n 为奇数时,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,由于 $\sum\limits_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=\sum\limits_{d\mid n}\overline{s_k}(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)$,其中 $\overline{s_k}(n)=\max\{m\mid m\in\mathbf{N}, m^k\mid n\}$. 参见文献[6],在此不再重复.

假设 n 为偶数且 $n=2^\alpha\cdot n_1$,其中 $\alpha\geqslant 1$,n_1 为奇数.

(1) 当 $n_1=1$ 时,$n=2^\alpha$. $\omega(n)\Omega(n)=\alpha$.

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=1+\sum_{d\mid n, d>1}\frac{1}{s^*(d)}=1+\frac{1}{2}\alpha,$$

则式(*)变为 $1+(1/2)\alpha=\alpha$,推出 $\alpha=2$,所以 $n=2^2$ 为式(*)的解.

(2) 当 $n_1>1$,$n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$　$(p_i>3)$ 时,$\omega(n)\Omega(n)=(k+1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$.

(ⅰ) 当 $n_1=p_1^{\alpha_1}$ 时,有

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{s^*(2^id)}=(1+\alpha_1)+\left(\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\right)\alpha=(1+\alpha_1)\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right),$$

则式(*)变为$(1+\alpha_1)(1+(1/2)\alpha)=2(\alpha+\alpha_1)$,即 $\alpha=2(1+2/(\alpha_1-3))$,由此推出 $\alpha=6,\alpha_1=4;\alpha=4,\alpha_1=5;\alpha=3,\alpha_1=7$. 所以 $n=2^6p_1^4, n=2^4p_1^5, n=2^3p_1^7$ 为式(*)的解.

(ⅱ) 当 $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ 时,有

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{s^*(2^id)}=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)=$$
$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+(1/2)\alpha),$$

则 式(*)变为$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+(1/2)\alpha)=3(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)$.

① 若有一个 α_i 满足 $\alpha_i=1(i=1,2)$,不妨设 $\alpha_1=1$,则有 $2(1+\alpha_2)(1+(1/2)\alpha)=3(1+\alpha+\alpha_2)$,即 $\alpha=1+3/(\alpha_2-2)$. 由此推出 $\alpha=4,\alpha_2=3;\alpha=2,\alpha_2=5$. 所以 $n=2^4p_1p_2^3$ 或 $n=2^4p_1^3p_2; n=2^2p_1^5p_2$ 或 $n=2^2p_1p_2^5$ 为(*)的解.

② 若有 2 个 α_i 满足 $\alpha_i=1$ 时,则有 $4(1+(1/2)\alpha)=3(2+\alpha)$,由此推出 $\alpha=-2$,不满足方程(*)的解.

③ 若 $\alpha=1$ 时,则有$(3/2)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)=3(1+\alpha_1+\alpha_2)$,即 $\alpha_1=1+2/(\alpha_2-1)$,由此可推出 $\alpha_1=3,\alpha=2;\alpha_1=2,\alpha_2=3$. 所以 $n=2p_1^3p_2^2$ 或 $n=2p_1^2p_2^3$ 为式(*)的解.

④ 若 $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=1$ 时. 可验证方程(*)无解.

(ⅲ) 当 $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$ 时,有

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{s^*(2^id)}=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right),$$

则式(*)变为

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+(1/2)\alpha)=4(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3).$$

同上讨论可推出式(*)的解为 $n=2^2p_1p_2p_3^2$ 或 $n=2^2p_1p_2^2p_3$ 或 $n=2^2p_1^2p_2p_3$.

(ⅳ) 当 $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}$ 时且 $\alpha\geqslant 2$,有

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)>5(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4).$$

可验证当 $\alpha=1$ 时,方程(*)无解.

(ⅴ) 当 $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(k\geqslant 5)$ 时,有

$$\sum_{d\mid n}\frac{1}{s^*(d)}=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)>(k+1)(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k),$$

由此推出方程(*)无解.

(3) 当 $n_1>1$,$n_1=3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_2<p_3<\cdots<p_k)$ 时. $\omega(n)\Omega(n)=(k+1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$.

（ⅰ）当 $k=1, n_1=3^{\alpha_1}$.

① $\alpha=1$ 时，

$$\sum_{d|n}\frac{1}{s^*(d)}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(2d)}=(1+\alpha_1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\alpha_1=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1.$$

则式（*）变为 $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1=2(1+\alpha_1)$，即 $\alpha_1=-\frac{3}{4}$，不满足方程（*）的解.

② $\alpha=2$ 时，

$$\sum_{d|n}\frac{1}{s^*(d)}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(2d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(2^2d)}=(1+\alpha_1)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\alpha_1\right)=2+\frac{5}{3}\alpha_1.$$

则式（*）变为 $2+(5/3)\alpha_1=2(2+\alpha_1)$，即 $\alpha_1=-6$，不满足方程（*）的解.

③ $\alpha\geqslant 3$ 时，

$$\sum_{d|n}\frac{1}{s^*(d)}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(2d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(2^2d)}+\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(2^id)}=$$

$$(1+\alpha_1)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\alpha_1\right)+(\alpha-2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\alpha_1\right)=1+\frac{5}{3}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha\alpha_1.$$

则式（*）变为 $1+\frac{5}{3}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha\alpha_1=2(\alpha+\alpha_1)$，即 $\alpha=\frac{10}{3}+\frac{16}{\alpha_1-6}$. 可推出 $\alpha=4, \alpha_1=30$；$\alpha=6, \alpha_1=12$. 所以 $n=2^4 3^{30}$，$n=2^6 3^{12}$ 为方程（*）的解.

（ⅱ）当 $k=2, n_1=3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$.

$$\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(d)}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{s^*(2^i)}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{1}{s^*(2^i3^j)}+\sum_{i=3}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{1}{s^*(2^i3^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{m=1}^{\alpha_2}\frac{1}{s^*(2^ip_2^m)}+$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\sum_{m=1}^{\alpha_2}\frac{1}{s^*(2^i3^jp_2^m)}+\sum_{j=1}^{\alpha_1}\sum_{m=1}^{\alpha_2}\frac{1}{s^*(2^33^jp_2^m)}+\sum_{m=1}^{\alpha_2}\frac{1}{s^*(2^43p_2^m)}+$$

$$\sum_{i=4}^{\alpha}\sum_{j=2}^{\alpha_1}\sum_{m=1}^{\alpha_2}\frac{1}{s^*(2^i3^jp_2^m)}. \tag{1}$$

① $2\geqslant\alpha\geqslant 1, \alpha_1, \alpha_2\geqslant 1$.

当 $\alpha=1$ 时，式(1)为 $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{3}=3(1+\alpha_1+\alpha_2)$，经验证方程（*）无正整数解.

当 $\alpha=2$ 时，式(1)为 $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+1+\frac{2}{3}\alpha_1+\alpha_2+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{3}=3(2+\alpha_1+\alpha_2)$，经验证 $\alpha_1=1, \alpha_2=8, \alpha_1=3, \alpha_2=2$，所以 $n=2^2\cdot 3p_2{}^8$，$n=2^2\cdot 3^3p_2^2$ 为方程（*）的解.

② $\alpha=3, \alpha_1, \alpha_2\geqslant 1$.

当 $p_2=5$，$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\alpha_2}{2}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{5}=3(3+\alpha_1+\alpha_2)$；

当 $p_2>5$，$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{3\alpha_2}{2}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{4}=3(3+\alpha_1+\alpha_2)$.

经验证方程（*）无正整数解.

③ $\alpha=4, \alpha_1=1$.

当 $p_2=5$，$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{4}{2}+\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{4\alpha_2}{2}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{5}+\frac{\alpha_2}{5}=3(4+\alpha_1+\alpha_2)$；

当 $p_2>5$，$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{4}{2}+\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{\alpha_1}{4}+\frac{4\alpha_2}{2}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{4}+\frac{\alpha_2}{4}=3(4+\alpha_1+\alpha_2)$.

经验证方程（*）无正整数解.

④ $\alpha\geqslant 4, \alpha_1\geqslant 2$.

当 $p_2=5$，$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{\alpha}{2}+\frac{2\alpha_1}{3}+\frac{(\alpha-2)\alpha_1}{4}+\frac{\alpha\alpha_2}{2}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{5}+\frac{\alpha_2}{5}+\frac{(\alpha-3)(\alpha_1-1)\alpha_2}{6}=$

$3(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)$；

当 $p_2>5$，$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\frac{\alpha}{2}+\frac{2\alpha_1}{3}+\frac{(\alpha-2)\alpha_1}{4}+\frac{\alpha\alpha_2}{2}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{4}+\frac{\alpha_2}{4}+\frac{(\alpha-3)(\alpha_1-1)\alpha_2}{4}=$
$3(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)$.

同理可验证这两个不定方程无正整数解.

（ⅲ）当 $k=3,4$ 时，同理可证方程（$*$）无解.

（ⅳ）当 $k\geqslant 5$ 时，有 $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)>(k+1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$.

$$\sum_{d|n}\frac{1}{s^*(d)}>\sum_{d|n_1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{d|2^\alpha,d>1}\frac{1}{s^*(d)}+\sum_{i=2}^{k}\sum_{d|2^\alpha,d>1}\frac{1}{s^*(dp_i)}+$$
$$\sum_{2\leqslant i<j}^{k}\sum_{d|2^\alpha,d>1}\frac{1}{s^*(dp_ip_j)}+\sum_{2\leqslant i<j<m}\sum_{d|2^\alpha,d>1}\frac{1}{s^*(dp_ip_jp_m)}=$$
$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)+\cdots+(1+\alpha_k)+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha[(k-1)+(k-2)+\cdots+1]+\frac{1}{2}\alpha>$$
$$(k+1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)+(k+1)\alpha=(k+1)(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k).$$

故方程（$*$）无解.

综上所述，定理证毕.

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only problems, solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] SANDOR J. On certain generalizations of the Smaradache function [J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5(2): 41-51.

[3] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[4] 薛西锋. 一类包含 Smarandache 对偶函数方程的求解[J]. 陕西师范大学学报：自然科学版，2007，35(4)：9-11.

[5] 陈斌. 包含 Smarandache 对偶函数方程的正整数解[J]. 天津师范大学学报：自然科学版，2012，32(3)：6-8.

[6] 郭晓燕，袁霞. 关于 Smarandache 问题研究的新进展[M]. United States of American: High American Press, 2010: 93-100.

Solution of an equation involving the Smarandache dual function

DONG Xiao-ru, YANG Rui-ni

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache dual function $s^*(n)$ was defined as the greatest positive integer m such that $m!\mid n$. The solutions of the equation $\sum_{d|n}\frac{1}{s^*(d)}=\omega(n)\Omega(n)$ were studied by using the elementary method and to obtain all its positive integer solutions.

Key words: Smarandache dual function; equation; positive integer solution

编辑：武　晖；校对：师　琅