DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2012.02.002

第 34 卷第 2 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2012 年 2 月
Vol. 34　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2012

文章编号：1673-9868(2012)02-0070-04

一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程

陈　斌

渭南师范学院 数学系，陕西 渭南 714000

摘要：对于任意正整数 n，设 $\varphi(n)$ 和 $S(n)$ 分别是关于 n 的 Euler 函数和 Smarandache 函数．利用初等数论以及组合、分析的方法，得到了方程 $\varphi(n)=S(n^k)$ 当 $k=8,9$ 时的所有正整数解，同时对方程的解及解的个数进行了讨论．

关 键 词：Smarandache 函数；Euler 函数；解

中图分类号：O156.4　　　　**文献标志码**：A

对于任意正整数 n，著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为使得 $n\mid m!$ 的最小正整数 m，即就是 $S(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N}_+,\ n\mid m!\}$．$S(n)$ 的各种性质是数论及其应用领域中一个十分引人关注的研究课题[1-5]．对于正整数 n，设 $\varphi(n)$ 是 n 的 Euler 函数，这里的 $\varphi(n)$ 表示不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数[6]．关于包含 Euler 函数和 Smarandache 函数的方程

$$\varphi(n)=S(n^k) \tag{1}$$

的解，很多学者都进行了研究，得到了一些较好的结果[7-11]．

本文解决了方程(1) 在 $k=8,9$ 时的求解问题及解的个数问题，证明了：

定理 1　当 $k=8$ 时，方程(1) 仅有解 $n=1,125,250,289,578$．

定理 2　当 $k=9$ 时，方程(1) 仅有解 $n=1,361,722$．

定理 3　当 $k\geqslant 10$ 时，方程(1) 仅存在有限个正整数解．

定理 4　若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 n 的标准分解式，且

$$S(p^{kr})=\max\{S(p_1^{k\alpha_1}),\ S(p_2^{k\alpha_2}),\ \cdots,\ S(p_s^{k\alpha_s})\}$$

则当 $p\geqslant 2k+1$，且 $k\geqslant 1$，$r\geqslant 2$ 时，方程(1) 无解；当 $2k+1$ 为素数时，方程(1) 仅有 2 个解，且 $n=2p^2$．

引理 1[6]　Euler 函数为积性函数，即对于任意互素的正整数 m 和 n，有

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$$

引理 2[6]　如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 n 的标准分解式，则有

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$$

引理 3　当 $n>2$ 时，必有 $2\mid\varphi(n)$．

证　(1°) 若正整数 n 有奇素因子，不妨设为 p，则 $p>2$ 且 $2\mid p-1$．又由引理 2 可得出 $p-1\mid\varphi(n)$，所以易知 $2\mid\varphi(n)$．

(2°) 若正整数 n 没有奇素因子，当 $n>2$ 时，必有 $n=2^s$，其中 s 是大于 1 的正整数，由 Euler 函数的性质易得 $\varphi(n)=2^{s-1}(2-1)=2^{s-1}$，所以 $2\mid\varphi(n)$．

收稿日期：2010-11-16

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071194)；陕西省科技厅自然科学基金资助项目(2010JM1009)；陕西省教育厅专项基金资助项目(11JK0476)；陕西省军民融合研究院 2011 年基金资助项目(11JMR10)；基础数学省重点扶持学科资助项目．

作者简介：陈　斌(1979-)，男，陕西咸阳人，讲师，主要从事数论的研究．

故由步骤(1°)和(2°)可知，引理 3 成立.

引理 4[8]　如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 n 的标准分解式，则

$$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_s^{\alpha_s})\}$$

引理 5[8]　对于素数 p 和正整数 k，有 $S(p^\lambda)\leqslant\lambda p$，特别地，当 $\lambda<p$ 时，有 $S(p^\lambda)=\lambda p$.

定理 1 的证明

把 $k=8$ 代入方程(1)可得

$$\varphi(n)=S(n^8)\tag{2}$$

显然 $n=1$ 是(2)式的解. 下面我们主要讨论 $n>1$ 时的情况.

设 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 n 的标准分解式，则由引理 4 有

$$S(n^8)=\max\{S(p_1^{8\alpha_1}),S(p_2^{8\alpha_2}),\cdots,S(p_s^{8\alpha_s})\}=S(p^{8r})\tag{3}$$

由引理 1 可知

$$\varphi(n)=\varphi(p^r)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)\tag{4}$$

联立(2)-(4)式可得

$$p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=S(p^{8r})\tag{5}$$

① 当 $p=2$，$r=1$ 时，由(5)式可知

$$\varphi\left(\frac{n}{2}\right)=S(2^8)=10\tag{6}$$

由(6)式可推得 $\varphi\left(\frac{n}{2}\right)>1$，则 n 必含奇素因子 q，且可得

$$s(q^8)=\begin{cases}18 & q=3\\35 & q=5\\49 & q=7\\8q & q>7\end{cases}\tag{7}$$

所以(3)式和(6)式矛盾，故当 $p=2$，$r=1$ 时，(2)式无解.

② 当 $p=2$，$r=2$ 时，由(5)式可知 $2\varphi\left(\frac{n}{4}\right)=S(2^{16})=18$，即 $\varphi\left(\frac{n}{4}\right)=9$，与引理 3 矛盾，所以当 $p=2$，$r=2$ 时，(2)式无解.

同理可证，当 $p=2$，$r=3,4,5,6,7,8$ 时，(2)式无解.

当 $p=2$，$r>8$ 时，由引理 5 有

$$8r\geqslant\frac{1}{2}S(2^{8r})=\frac{1}{2}2^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{2^r}\right)=2^{r-2}\varphi\left(\frac{n}{2^r}\right)\geqslant2^{r-2}=\frac{1}{4}2^r$$

即 $32r\geqslant2^r$，矛盾. 所以当 $p=2$，$r>8$ 时，(2)式无解.

③ 当 $p=3$，$r=1$ 时，由(5)式可知 $2\varphi\left(\frac{n}{3}\right)=S(3^8)=18$，即 $\varphi\left(\frac{n}{3}\right)=9$，与引理 3 矛盾，所以当 $p=3$，$r=1$ 时，(2)式无解.

同理可证，当 $p=3$，$r=2,3,4$ 时，(2)式无解.

当 $p=3$，$r\geqslant5$ 时，由引理 5 有

$$8r\geqslant\frac{1}{3}S(3^{8r})=\frac{2}{3}3^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{3^r}\right)=2\cdot3^{r-2}\varphi\left(\frac{n}{3^r}\right)\geqslant2\cdot3^{r-2}>2e^{r-2}>$$
$$2\left[1+(r-2)+\frac{1}{2}(r-2)^2+\frac{1}{6}(r-2)^3+\frac{1}{24}(r-2)^4+\frac{1}{120}(r-2)^5\right]>8r$$

矛盾. 所以当 $p=3$，$r\geqslant5$ 时，(2)式无解.

④ 当 $p=5$，$r=1$ 时，由(5)式可知 $4\varphi\left(\frac{n}{5}\right)=S(5^8)=35$，矛盾，故(2)式无解.

当 $p=5$, $r=2$ 时, 有 $20\varphi\left(\frac{n}{25}\right)=S(5^{16})=70$, 即 $2\varphi\left(\frac{n}{25}\right)=7$, 矛盾, 故(2)式无解.

当 $p=5$, $r=3$ 时, 有 $100\varphi\left(\frac{n}{125}\right)=S(5^{24})=100$, 即 $\varphi\left(\frac{n}{125}\right)=1$, 所以 $n=125,250$, 而

$$\varphi(125)=\varphi(5^3)=100=S(5^{24})=S(125^8)$$
$$\varphi(250)=\varphi(2\cdot 5^3)=100=S(5^{24})=S(250^8)$$

故 $n=125,250$ 是(2)式的解.

当 $p=5$, $r=4$ 时, 因为 $5^3\cdot 4\varphi\left(\frac{n}{625}\right)>S(5^{32})=130$, 所以(2)式无解.

同理可得当 $p=5$, $r>4$ 时, (2)式也无解.

⑤ 当 $p=7$, $r=1$ 时, 由(5)式可知 $6\varphi\left(\frac{n}{7}\right)=S(7^8)=49$, 矛盾, 故(2)式无解.

同理可得当 $p=7$, $r=2$ 时, (2)式无解. 而当 $p=7$, $r=3$ 时, 因为 $7^2\cdot 6\varphi\left(\frac{n}{243}\right)>S(7^{24})=147$, 所以(2)式无解; 当 $p=7$, $r>3$ 时, (2)式无解; 当 $p=11,13$, $r\geqslant 1$ 时, (2)式无解.

⑥ 当 $p=17$, $r=1$ 时, 由(5)式可知 $16\varphi\left(\frac{n}{17}\right)=S(17^8)=17\cdot 8$, 矛盾, 故(2)式无解.

当 $p=17$, $r=2$ 时, 有 $17\cdot 16\varphi\left(\frac{n}{17^2}\right)=S(17^{16})=17\cdot 16$, 即 $\varphi\left(\frac{n}{289}\right)=1$, 故 $n=289$, 578. 而

$$\varphi(289)=\varphi(17^2)=272=S(17^{16})=S(289^8)$$
$$\varphi(578)=272=S(17^{16})=S(578^8)$$

故 $n=289,578$ 是(2)式的解.

当 $p=17$, $r\geqslant 3$ 时, 由于 $17^{r-1}\cdot 16\varphi\left(\frac{n}{17^r}\right)>S(17^{8r})$, 所以(2)式无解.

⑦ 当 $p=19$, $r=1$ 时, 有 $18\varphi\left(\frac{n}{19}\right)=S(19^8)=8\cdot 19$, 矛盾, 所以(2)式无解.

同理, 当 $p=19$, $r=2,3$ 时, (2)式无解; 当 $p=19$, $r\geqslant 4$ 时, $19r\geqslant 19^{r-2}18\varphi\left(\frac{n}{19^r}\right)\geqslant 18\cdot 19^{r-2}$, 矛盾. 故(2)式无解.

⑧ 当 $p>19$, $r=1$ 时, 有 $(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p}\right)=S(p^8)=8\cdot p$, 因为 $(p, p-1)=1$, 且若有 $\frac{8p}{p-1}=2k$ $(k\in\mathbf{N}_+)$, 即 $p=\frac{k(p-1)}{4}$, 矛盾, 所以(2)式无解.

当 $p>19$, $r\geqslant 2$ 时, 由引理5有

$$8r\geqslant p^{r-2}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)\geqslant 22\cdot 23^{r-2}$$

显然矛盾. 故(2)式无解.

综上所述可得: 当 $k=8$ 时, (2)式仅有解 $n=1,125,250,289,578$. 这样就证明了定理1.

同理, 用相似的方法可以证明定理2也成立.

定理3的证明

对任意给定的正整数 k, 设 $n>1$, 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 n 的标准分解式, 由 $S(n)$ 的定义可知

$$S(n^k)=\max\{S(p_1^{k\alpha_1}), S(p_2^{k\alpha_2}), \cdots, S(p_s^{k\alpha_s})\}=S(p^{kr})$$

又因

$$\varphi(n)=\varphi(p^r)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)$$

故由方程(1)可得

$$p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=S(p^{kr})$$

而

$$p \leqslant S(p^{kr}) \leqslant krp$$

若 $p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=krp$，则由 $\varphi(n)$ 的定义及性质可得 $p^{r-1}(p-1) \mid krp$，即 $p^{r-2}(p-1) \mid kr$. 令 $y=p^{r-2}(p-1)-kr$，p 为给定的素数，y 是 r 的函数. 则

$$y'=(r-2)(p-1)p^{r-3}-k$$

当 $p \geqslant 2k+1$ 且 $r \geqslant 2$ 时，可得 $y'>0$，故此时 y 是单调递增的，且易得 $y>0$.

所以方程(1) 在 $p \geqslant 2k+1$ 且 $r \geqslant 2$ 时无解，即仅存在有限个正整数 n 能使得方程(1) 成立.

最后，我们可以由引理 1－5，结合定理 2、定理 3 的证明方法，易推出定理 4 也成立.

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago：Xiquan Publ House, 1993：21－25.

[2] FARRISM, MITCHELL P. Bounding the Smarandache Function [J]. Smarandache Notions J, 2002, 13：37－42.

[3] 吴　欣. 关于含伪 Smarandache 函数及其对偶函数的方程的可解性 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(8)：102－105.

[4] 赵院娥. 关于 Smarandache 和的均值 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：44－47.

[5] 陈　姣. 一类包含 Smarandache 和函数的 Dirichlet 级数 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：39－43.

[6] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007：31－32.

[7] MA Jin-ping. An Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2)：89－90.

[8] YI Yuan. An Equation Involving the Euler Function and Smarandache Function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2)：172－175.

[9] 黄寿生，陈锡庚. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^5)$ [J]. 华南师范大学学报：自然科学版，2007(4)：41－43.

[10] 郑　涛. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^t)$ [J]. 中国科教创新导刊，2009(2)：152－154.

[11] 高　楠，高　丽. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^7)$ [J]. 西南民族大学学报：自然科学版，2009，35(5)：992－994.

An Equation Involving the Smarandache Function and the Euler Function

CHEN　Bin

Department of Mathematics, Weinan Teachers University, Weinan Shaanxi 714000, China

Abstract: For any positive integer n, let $\varphi(n)$ and $S(n)$ denote the Euler function and the Smarandache function of the integer n. In this paper, the positive solutions of the equation $\varphi(n)=S(n^k)$ when $k=8,9$ are obtained using the elementary number theory method, the combination method and the analysis method. In addition, the solutions and the number of the solutions about the equation are discussed.

Key words: Smarandache function; Euler function; solution

责任编辑　廖　坤