第 9卷 第 16期 2009年 8月
1671-1819(2009)16-4750-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol.9 No.16 Aug. 2009

研究简报

数 学

一个包含 Smarandache函数的复合函数的均值

黄 炜
(宝鸡职业技术学院 基础部,宝鸡 721013)

摘 要 对于任意的正整数 n,用 $S(n)$表示 Smarandache函数,即 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$,而函数 $u(n)$的定义为,最小的正整数 k使得 $n\le k(2k-1)$,即 $u(n)=\min\{k: n\le k(2k-1), k\in N\}$。主要利用初等方法和解析方法,研究复合函数 $S(u(n))$的性质,获得了较强的均值性质及渐进公式。
关键词 Smarandache函数 复合函数 均值 渐近公式
中图法分类号 O156.4; 文献标志码 A

对于任意的正整数 n,著名的 Smarandache函数 $S(n)$定义为:$S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$,例如:$S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, …从 $S(n)$的定义和性质,很容易推断,对于任意正整数 n,若它的标准素因数分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则有

$$S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\} \tag{1}$$

关于 $S(n)$的算术性质,有许多学者进行研究,并得到了许多重要理论价值的成果。文献[1]研究了 Smarandache函数的上下界问题,得到了 $S(p^\alpha)$的上下界估计,即:$(p-1)\alpha\le S(p^\alpha)\le(p-1)\alpha[\alpha+1+\log_p\alpha]+1$。

文献[2]研究了 Smarandache函数的均值性质,给出了 $S(n)$及$\frac{S(n)}{n}$均值的渐进公式

$$\sum_{n\le x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$$

$$\sum_{n\le x}\frac{S(n)}{n}=\frac{\pi^2}{6}\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)。$$

文献[3]研究了 Smarandache函数的值分布性质,获得了下面更深刻的结果:

设 $P(n)$表示 n最大素因数,对于任意整数 $x>1$,有渐进公式:

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

本文研究了 $S(u(n))$的均值性质,并给出了较强的均值估计及有趣的恒等式,发展了 F. Smarandache教授在《Only Problems, Not solutions》一书中所涉及问题的研究工作。同时,将证明以下结论:

定理 1 设 $k\ge 2$是给定正整数,对于任意整数 $x>1$,有下面的渐进公式

$$\sum_{n\le x}S(u(n))=\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

2009年 2月 9日收到 宝鸡职业技术学院重点科研基金项目(ZK0216)资助
第一作者简介:黄 炜(1961—),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院副教授,研究方向:数论及数学应用。E-mail:wphuangwei@163.com。

其中 c_i ($i=2,3,\cdots,k$) 是可计算常数。

特别的当 $k=1$ 时，我们有：

推论　对于任意整数 $x>1$，有下面的渐进公式

$$\sum_{n\le x} S(u(n))=\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

1　引理及其证明

为了完成定理的证明，先叙述两个简单的引理。

引理 1　对于任何实数 $x\ge 1$，有渐近公式

设 $\pi(x)=\sum_{p\le n}1$，由 Abel 求和公式[4] 及素数定理，

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

其中 $a_i=(i-1)!$，($i=1,2,3,\cdots,k$)。

引理 1 的证明可参阅文献[4]。

引理 2　设 p 是素数，则有

$$\sum_{p\le x}p^2=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

证明　由 Abel 求和公式[4] 及引理 1，有

$$\sum_{p\le x}p^2=\int_{\frac{3}{2}}^{x}t^2\,d\pi(t)=x^2\pi(x)-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}t\pi(t)\,dt=$$

$$x^2\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-$$

$$2\int_{\frac{3}{2}}^{x}\left(t\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i t}{\ln^i t}+O\left(\frac{t}{\ln^{k+1}t}\right)t\right)dt=$$

$$x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}-\frac{2}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)=$$

$$\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

于是完成了引理 2 的证明。

2　定理的证明

完成定理的证明：

证明　对于任意正整数 $n>1$，当 $m(2m-1)\le n\le(m+1)(2m+1)$ 时，都有 $u(n)=m$，也就是说方程 $u(n)=m$ 有 $4m+1$ 个解，$m(2m-1)+1$，$m(2m-1)+2$，$\cdots$，$(m+1)(2m+1)$。

由于 $n\le x$，所以由文献[5]知当 $f(n)=m$ 时，m 满足 $1\le m\le\frac{1+\sqrt{8n+1}}{4}$，亦即 $m=\frac{\sqrt{2n}}{2}+O(1)$，于是注意到 $S(n)\le n$，有：

$$\sum_{n\le x}S(u(n))=\sum_{\substack{n\le x\\ f(n)=m}}S(m)=\sum_{m\le\frac{1+\sqrt{8n+1}}{4}}m\cdot S(m)+O(x)=\sum_{m\le\frac{\sqrt{2x}}{2}}m\cdot S(m)+O(x)\qquad(2)$$

现将所有正整数 $1\le m\le\frac{\sqrt{2n}}{2}$ 分成两个子集 A，B，其中 A 是满足那些存在素数 p 使得 $p|m$，且 $p>\sqrt{m}$ 的整数 m，而 B 是包含区间 $\left[1,\frac{\sqrt{2x}}{2}\right]$ 中不属于集合 A 的那些正整数，于是利用性质(1)式，有

$$\sum_{m\in A}m\cdot S(m)=\sum_{\substack{m\le\frac{\sqrt{2x}}{2}\\ p|m,\ \sqrt{m}<p}}m\cdot S(m)=\sum_{\substack{mp\le\frac{\sqrt{2x}}{2}\\ m<p}}mp\cdot S(mp)=\sum_{\substack{mp\le\frac{\sqrt{2x}}{2}\\ m<p}}mp\cdot p=\sum_{m\le 2\sqrt{2x}}m\sum_{m<p\le\frac{\sqrt{2x}}{2m}}p^2\qquad(3)$$

由引理 2 我们有：

$$\sum_{m<p\le\frac{\sqrt{2x}}{2m}}p^2=\frac{1}{24}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right)\qquad(4)$$

其中 b_i ($i=2,3,\cdots,k$)，是可计算常数，并注意到：$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$，由(3)式、(4)式可以推断：$\sum_{m\in A}m\cdot S(m)=$

$$\frac{1}{24}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}}\sum_{m\le 2\sqrt{2x}}\frac{1}{m^2}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^2\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)=\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\qquad(5)$$

其中 $c_1=1$，c_i ($i=2,3,\cdots,k$)，是可计算常数。

现在讨论集合 B 的情况，由(1)式及集合 B 的定义知，对于任意的 $m\in B$，若它的标准素因数分解式是 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，则有

$$S(n)=\max_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\le\max_{1\le i\le r}\{\alpha_i\cdot p_i\}\le\sqrt{m}\ln m\qquad(6)$$

于是由(1)式有

$$\sum_{m\in B}m\cdot S(m)\le\sum_{m\in B}m\cdot\sqrt{m}\ln m\le$$

$$\sum_{m\leqslant \frac{\sqrt{2x}}{2}} m^{\frac{3}{2}}\ln m \ll x^{\frac{5}{4}}\ln x \qquad (7)$$

由集合 A，B的定义及（2）式、（5）式、（7）式有

$$\sum_{n\leqslant x} S(u(n)) = \sum_{m\leqslant \frac{\sqrt{2x}}{2}} m\circ S(m) + O(x) =$$

$$\sum_{n\in A} m\circ S(m) + \sum_{n\in B} m\circ S(m) + O(x) =$$

$$\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\circ (2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

其中 $c_1=1$，c_i（$i=2, 3, \cdots, k$），是可计算常数。

完成了定理的证明。

参 考 文 献

1 Mark F, Patrick M. Bounding the Smaranache function. Smaranache Notions Journal, 2002; 13(1) 37—42

2 Wang Y X. On the Smaranache function research on Smaranache Problems in Number Theory Collected papers, Edited by Zhang Wenpeng America Hexis 2005; 103—106

3 Xu Z F. On the value distribution of the Smarandache function. Acta Mathematics Sinica, 3 Chinese Series, 2006; 49(5): 1009—1012

4 Pan C D, Pan C B. Foundation of analytic number theory. Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese)

5 吕忠田．关于正整数的六边形数部分．纯粹数学与应用数学，2007; 23(3): 377—380

One Hybrid Mean Value Formula Involving Smarandache Function

HUANG Wei

(Department of on the Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P. R. China)

[Abstract] For any positive integer n, let S(n) denotes the Smarandache function, that S(n) = min{m: n|m!, m∈N}. The elementary methods is used to study the mean value properties of the composite function S(f(n)), and given a sharper asymptotic formula for it.

[Key words] Smarandache function composite function mean value asymptotic formula

（上接第 4749页）

80 Daniel S, Morris L, Chen Y, et al. New visco-elastic surfactant formulations extend simultaneous gravel-packing and cake-cleanup technique to higher-pressure and higher-temperature horizontal open-hole completions: laboratory development and a field case history from the North Sea. SPE73770, 2002

81 Mathis S P, Pitoni E, Ripa G, et al. VES fluid allows minimized pad volumes and viscosity to optimize frac-pack geometry completion type evolution in Barbara Field, Central Adriatic Sea. SPE78317, 2002

Technical Progress in Coiled Tubing Fracturing

WANG Hai-tao, LI Xiang-fang*

(MOE Key Laboratory of Petroleum Engineering in China University of Petroleum, Beijing 102249, P. R. China)

[Abstract] Conventional through screw-connected tubing fracturing techniques are limited in accurate location of opening fractures, isolation of multilayer, efficient packing of fractures, and operation schedule. Three new techniques of through coiled tubing fracturing (CTF) are introduced. The working mechanisms, process features, some existed limitations, problems, development urgencies and tendencies are discussed. The CTF technique is more applicable in many types of oil/gas reservoir stimulation. In field application process, the supporting bottomhole assembly tools, fracturing fluid system, fracturing design, target stimulation layers optimization are the key to success. CT equipment and string reliability continue to be the focus of efforts to reduce downhole risks and decrease operational failures. CTF technique has so much potential that it should be strengthen and instead of the conventional fracturing gradually.

[Key words] coiled tubing fracturing process mechanism limitations urgencies tendencies