DOI:10.13895/j.cnki.jimufe.2013.05.001

Smarandache 对偶函数次幂的均值

李梵蓓

(内蒙古财经大学　统计与数学学院,内蒙古　呼和浩特　010070)

[摘　要] 对于任意的正整数 n,Smarandache 对偶函数定义为最大的正整数 m 使得 $m! \mid n$,即 $S^*(n) = \max\{m: m! \mid n, m \in N\}$。本文的主要目的是利用初等的方法研究 Smarandache 对偶函数 k 次幂的均值性质,并且给出一个较强的渐近公式。

[关键词] Smarandache 对偶函数; 初等方法; 渐近公式

[中图分类号] O174　　[文献标识码] A　　[文章编号] 2095 - 5871(2013)05 - 0134 - 03

一、引言

对于任意的正整数 n,Smarandache 对偶函数定义为最大的正整数 m 使得 $m! \mid n$,即 $S^*(n) = \max\{m: m! \mid n, m \in N\}$。例如 $S^*(1) = 1$,$S^*(2) = 2$,$S^*(3) = 1$,$S^*(4) = 2$,$S^*(5) = 1$,$S^*(6) = 3$,$S^*(7) = 1$,$S^*(8) = 2$,$S^*(9) = 1$,$S^*(10) = 2$,$S^*(11) = 1$,$S^*(12) = 3$,$S^*(13) = 1$,$S^*(14) = 2$,$S^*(15) = 1$,……。这一函数是由罗马尼亚数论专家 Jozsef Sandor[1] 教授引入的,文献[1]中介绍了 Smarandache 对偶函数的一些基本性质,并且获得了一系列有趣的结果。在文献[2]中,Jozsef Sandor 提出了一个猜想:

$$S^*((2k-1)!(2k+1)!) = q-1,$$

其中 k 是一个正整数,q 是 $2k+1$ 后的第一个素数。这一猜想已经被乐茂华教授[3]证明。

许多学者都对 *Smarandache* 对偶函数的性质进行了研究,参见文献[4-6]。例如,在文献[4]中,薛舍姣研究了 $S^*(n)$ 的均值性质,并且给出了一个渐近公式

$$\sum_{n \le x} S^*(n) = (e-1)x + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right) \qquad (1)$$

以及等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(S^*(n))^k}{n^s} = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k - (n-1)^k}{(n!)^s}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S^*(n)n^s} = \zeta(s) \cdot \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)((n+1)!)^s}\right),$$

其中 e 为常数,$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 为 Riemann - zeta 函数。

李洁研究了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s}$ 的收敛性质,并且得到了一个有趣的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^s}, \quad (s>1)。$$

本文我们主要利用初等方法研究了 Smarandache 对偶函数次幂的均值性质,并且得到如下渐近公式:

定理: 对任意满足 $x > 1$ 的实数,我们有渐近公式

$$\sum_{n \le x} (S^*(n))^k = x \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{k+1}}{(m+1)!} + O\left(\frac{\ln^{k+1} x}{(\ln\ln x)^{k+1}}\right).$$

我们令 $k = 2$,则有以下结论:

推论: 对于 Smarandache 对偶函数的二次幂,我们有渐近公式

[收稿日期] 2013 - 04 - 17

[作者简介] 李梵蓓(1953 -),女,陕西佳县人,内蒙古财经大学统计与数学学院教授,从事基础数学研究.

$$\sum_{n\leq x}(S^*(n))^2=ex+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right),$$

其中 $e=2.718281828459$ 为一常数。

二、定理的证明

在这部分，我们利用初等方法来完成定理的证明。对任意的正实数 m，由 Stirling 公式（参见文献[6]的定理 3.3.1）我们知道

$$\ln(m!)=\sum_{k=1}^{m}\ln k=m\ln m-m+O(1) \qquad (2)$$

对任意的实数 $x>1$，我们令 s 为满足 $s!\leq x<(s+1)!$ 的正整数。则由(2)式我们可以推导出

$$s=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

由函数 $S^*(n)$ 的定义以及以上的估计，我们有

$$\sum_{n\leq x}(S^*(n))^k=\sum_{m!\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ S^*(n)=m}}m^k$$

$$=\sum_{\substack{m!\leq x\\ m!\cdot n\leq x\\ m+1!/n}}m^k=\sum_{m!\leq x}m^k\sum_{\substack{n\leq\frac{x}{m!}\\ m+1!/n}}1$$

$$=\sum_{m!\leq x}m^k\Big(\sum_{n\leq\frac{x}{m!}}1-\sum_{n\leq\frac{x}{(m+1)!}}1\Big)$$

$$=\sum_{m!\leq x}m^k\left(\frac{mx}{(m+1)!}+O(1)\right)$$

$$=x\cdot\sum_{m!\leq x}\frac{m^{k+1}}{(m+1)!}+O\Big(\sum_{m!\leq x}m^k\Big)$$

$$=x\cdot\sum_{m!\leq\frac{\ln x}{\ln\ln x}}\frac{m^{k+1}}{(m+1)!}+O\left(\frac{\ln^k x}{(\ln\ln x)^k}\cdot\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)$$

$$+O\left(\frac{\ln^k x}{(\ln\ln x)^{2k}}\cdot\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{k+1}}{(m+1)!}+O\left(x\cdot\sum_{m!>x}\frac{m^{k+1}}{(m+1)!}\right)$$

$$+O\left(\frac{\ln^{k+1}x}{(\ln\ln x)^{k+1}}\right)$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{k+1}}{(m+1)!}+O\left(\frac{\ln^{k+1}x}{(\ln\ln x)^{k+1}}\right),$$

证毕。

当 $k=1$ 时，我们有

$$\sum_{n\leq x}S^*(n)$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2}{(m+1)!}+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m+1)-1]^2}{(m+1)!}+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(m+1)^2}{(m+1)!}-\frac{2(m+1)}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(m+1)}{m!}-\frac{2}{m!}+\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(m-1)!}+\frac{1}{m!}-\frac{2}{m!}+\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

$$=x\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\right)$$

$$+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

$$=x\cdot[e-(e-1)+(e-2)]+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

$$=(e-1)x+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right) \qquad (3)$$

(3)式满足(2)式的结论，也就验证了我们的定理。

下面来证明我们的推论，令定理中的 $k=2$，则有

$$\sum_{m=1}^{\infty}(S^*(n))^2$$

$$=x\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3}{(m+1)!}+O\left(\frac{\ln^3 x}{(\ln\ln x)^3}\right)$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$，所以

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3}{(m+1)!}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m+1)-1]^3}{(m+1)!}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)^3-3(m+1)^2+3(m+1)-1}{(m+1)!}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(m+1)^2}{m!}-\frac{3(m+1)}{m!}+\frac{3}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{m^2+2m+1}{m!}-\frac{3}{(m-1)!}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{m!}+\frac{3}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{m}{(m-1)!}+\frac{2}{(m-1)!}+\frac{1}{m!}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{(m-1)!}-\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{m-1}{(m-1)!}+\frac{1}{(m-1)!}-\frac{1}{(m-1)!}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(m-2)!}+\frac{1}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-2)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}$$

$$= (-1+e) + (e-1) - (e-2)$$
$$= e,$$

根据上式，我们有

$$\sum_{n\leqslant x}(S^*(n))^2$$
$$= x \cdot \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3}{(m+1)!} + O\left(\frac{\ln^3 x}{(\ln \ln x)^3}\right)$$
$$= ex + O\left(\frac{\ln^3 x}{(\ln \ln x)^3}\right).$$

由此我们完成了推论的证明。

根据以上方法，对于任意的满足 $k\geqslant 3$ 的整数，我们均可以计算出 $\sum_{n\leqslant x}(S^*(n))^k$ 的渐近公式，由于过程比较繁琐，我们在此就不一一赘述了。

[参考文献]

[1] J. Sandor. On certain generalizations of the Smarandache function, Notes Numb [J]. Th. Discr. Math., 1999, (11): 45－51.

[2] J. Sandor. On certain generalizations of the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2000, (11): 202－212.

[3] Maohua Le. A conjecture concerning the Smarandache dual functions [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, (14): 153－155.

[4] Shejiao Xue. On the Smarandache dual function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 29－32.

[5] Jie Li. On Smarandache dual function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 111－113.

[6] J. Sandor. On certain generalizations of the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2000, (11): 202－212.

[7] Wang Yongxing. On the smarandache function [J]. Research on Smarandache problems in number theory, Hexis, 2005, (2): 103－106.

[8] Pan Chengdong and Pan Chengbiao. Foundation of Analytic Number Theory [M]. Science Press, Beijing, 1991: 49－55.

[9] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. Springer－Verlag, New York, 1976.

[10] F. Smarandache. Only Problems, Not Solutions [M]. Xiquan Publishing House, Chicago, 1993.

[责任编辑：高平亮]

On the K－th Mean Value of Smarandache Dual Function

LI Fan－bei

(Inner Mongolia University of Finance and Economics, Hohhot 010070, China)

Abstract: For any positive integer, the Smarandache dual function is defined as the greatest positive integer m! | n. That is $S^*(n) = max\{m: m! \mid n, m \in N\}$. The main purpose of this paper is using the elementary method to study the k－th mean value of Smarandache dual function, and give an asymptotic formula for it.

Key words: Smarandache dual function; elementary method; asymptotic formula