第 42 卷第 19 期　　数学的实践与认识　　Vol.42, No. 19
2012年 10 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Oct., 2012

Smarandache 可求积因数对问题

李毅君

(西安石油大学 理学院, 陕西　西安 710065)

摘　要: 对任意正整数 n, 设 $d(n)$ 表示 n 的 Dirichlet 除数函数, 即就是 n 的所有不同正因数的个数. Smarandache 可求积因数对问题是：求所有正整数对 m 及 n 使得 $d(m)+d(n)=d(mn)$. 主要目的是利用初等方法以及除数函数的性质研究这一问题, 并给予彻底解决. 具体地说也就是证明了正整数对 m 及 n 满足方程 $d(m)+d(n)=d(mn)$ 当且仅当 $(m,n)=(pq^{\alpha},q)$ 或者 $(m,n)=(p,p^{\alpha}q)$, 其中 p 及 q 为不同的素数, α 为非负整数.

关键词: F. Smarandache 可求积因数对; 初等方法; 除数函数; 方程; 正整数解

1　引言及结论

众所周知, 著名的 Ditichlet 除数函数 $d(n)$ 定义为 n 的所有不同正因数的个数. 即就是算术函数 $d(n)=\sum\limits_{d|n}1$. 例如：$d(1)=1$, $d(2)=2$, $d(3)=2$, $d(4)=3$, $d(5)=2$, $d(6)=4$, $d(7)=2$, $d(8)=4$, $d(9)=3$, $d(10)=4$, $d(11)=2$, $d(12)=6$, $d(13)=2$, $d(14)=4$, $d(15)=4$, $\cdots\cdots$. 这一函数在初等数论研究中占有十分重要的位置, 它与许多著名的经典数论问题密切相关, 因而受到不少数论名家专家的重视和关注, 并取得了很多具有重要理论意义的研究成果. 例如 Dirichlet 的开创性工作 [1] 利用分拆的技巧给出了渐近公式

$$\sum_{n\le x}d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+\Delta(x)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O\left(\sqrt{x}\right)$$

其中 γ 为 Euler 常数.

M. N. Huxley[2] 利用三角和估计方法证明了估计式

$$\sum_{n\le x}d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O\left(x^{\frac{7}{22}}\left(\ln x\right)^{\frac{89}{22}}\right)$$

当然误差项 $\Delta(x)$ 还有改进的余地, 人们猜测 $\Delta(x)\ll x^{\frac{1}{4}+\epsilon}$, 其中 ϵ 是任意给定的整数. 这一点也不难从 Tong K C 的文献 [3] 中理解, 该文中作者研究了误差项 $\Delta(x)$ 的积分均值问题, 证明了渐近式

$$\int_0^T\Delta^2(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\,T^{\frac{3}{2}}+O\left(T\ln^4T\right)$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{6\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{d^2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$. 有关函数 $d(n)$ 的进一步性质, 可参阅文献 [4–5].

收稿日期: 2012-05-05
资助项目: 国家自然科学基金 (11071194); 西安石油大学青年科技创新基金 (2012QN012)

另一方面, Amarnath Murthy 及 Charles Ashbacher 在文献 [6] 的第二章第五节的问题八中引入了 Smarandache 可求和因数对 (SSDP) 的概念: 即就是一对正整数 m 及 n 且 $(m,n)=1$, 它们满足方程 $d(m)+d(n)=d(m+n)$. 同时他们提出了下面两个猜想:

猜想 A 存在无穷多个正整数 m 及 n, 它们是 Smarandache 可求和因数对;

猜想 B 对任意正整数 m, 是否存在正整数 n 使得 $(m,n)=1$ 且 $d(m)+d(n)=d(m+n)$.

最近, 在一篇还没有正式发表的论文中, 李玲利用著名的陈景润定理证明了下面的结论:

存在无穷多个正整数 m 及 n 且 $(m,n)\le 2$ 使得方程 $d(m)+d(n)=d(m+n)$ 成立, 其中 (m,n) 表示 m 和 n 的最大公约数.

显然这一结论对猜想 A 做出了实质性进展. 对于猜想 B, 目前我们还没有看到任何研究工作, 因此说它仍然是一个公开问题. 受文献 [6] 中的启发, 本文中我们提出了一个类似的问题, 称为 Smarandache 可求积因数对问题, 也就是求所有正整数对 m 及 n 使得它们满足方程:

$$d(m)+d(n)=d(mn) \tag{1}$$

关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有在现有的文献中看到. 本文利用初等方法以及除数函数的性质研究这一问题, 并给予彻底解决. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 正整数对 (m,n) 满足方程 $d(m)+d(n)=d(mn)$ 当且仅当 $(m,n)=(pq^{\alpha},q)$ 或者 $(m,n)=(p,p^{\alpha}q)$, 其中 p 及 q 为不同的素数, α 为非负整数.

2 定理的证明

这节我们利用初等方法以及 Dirichlet 除数函数的性质给出定理的直接证明. 首先由除数函数 $d(n)$ 的定义知当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时有计算公式 (参阅文献 [5] 及 [7]):

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_k+1) \tag{2}$$

现在对任意正整数对 m 及 n, 如果它们满足方程 (1), 那我们分两种情况讨论:

(A) 当 $(m,n)=1$ 时, 即就是 m 和 n 互素, 此时由除数函数 $d(n)$ 的可乘性质知 $d(mn)=d(m)\cdot d(n)$. 所以由方程 (1) 我们有

$$d(m)+d(n)=d(mn)=d(m)\cdot d(n) \tag{3}$$

由 (3) 式立刻推出 $d(m)|d(n)$ 以及 $d(n)|d(m)$. 从而有 $d(m)=d(n)$. 即就是 $2d(m)=d^2(m)$ 或者 $d(m)=d(n)=2$. 这说明 $m=p$, $n=q$, 其中 p 及 q 为不同的素数. 也就是说所有满足方程 (1) 且 $(m,n)=1$ 的整数解为 $m=p$ 及 $n=q$.

(B) 当 $(m,n)>1$ 时, 此时设 $(m,n)=r>1$, 设 u 是和 r 有相同素因数的 m 的最大因数. $m=m_1\cdot u$. 再设 v 是和 r 有相同素因数的 n 的最大因数. $n=n_1\cdot v$. 此时显然有 $(m_1,u)=(n_1,v)=1$, $(m_1,n_1)=1$. 于是当 m 及 n 满足方程 (1) 时有

$$d(m)+d(n)=d(m_1)\cdot d(u)+d(n_1)\cdot d(v)=d(mn)=d(m_1)\cdot d(n_1)\cdot d(uv) \tag{4}$$

首先我们证明 (4) 式中 u(其中 r, u 及 v 含有相同的素因子) 不可能含有大于一个素因子. 否则可设 $u=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $v=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}p_3^{\beta_3}\cdots p_k^{\beta_k}$, 其中 α_i 及 β_i 为正整数, $i=1, 2, \cdots, k$

且 $k \geq 2$. 此时显然有计算公式

$$d(mn) = d(m_1) \cdot d(n_1) \cdot d(uv) = d(m_1) \cdot d(n_1) \cdot \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i + 1)$$

于是由上式, (2) 式及 (4) 式可得

$$d(m_1) \cdot \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) + d(n_1) \cdot \prod_{i=1}^{k} (\beta_i + 1) = d(m_1) \cdot d(n_1) \cdot \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i + 1)$$

或者

$$\frac{1}{d(n_1)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)}{\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i + 1)} + \frac{1}{d(m_1)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{k} (\beta_i + 1)}{\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i + 1)} = 1 \tag{5}$$

注意到 $k \geq 2$, 由上式立刻推出不等式:

$$1 \leq \frac{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)}{(\alpha_1 + \beta_1 + 1)(\alpha_2 + \beta_2 + 1)} + \frac{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)}{(\alpha_1 + \beta_1 + 1)(\alpha_2 + \beta_2 + 1)}$$

上式等价于不等式

$$\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1 \leq 1 \tag{6}$$

因为 α_i 及 β_i ($i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$) 为正整数, 所以不等式 (6) 是不可能成立的. 这样我们就证明了 u 最多含有一个素因子.

当 u 和 v 含有一个素因子 p 时, 不妨设 $m = m_1 \cdot p^{\alpha}$, $n = n_1 \cdot p^{\beta}$, α 及 β 为正整数. 此时由 (5) 式我们有

$$\frac{1}{d(n_1)} \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 1} + \frac{1}{d(m_1)} \cdot \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta + 1} = 1 \tag{7}$$

首先在 (7) 式中 $d(m_1)$ 及 $d(n_1)$ 不可能同时等于 1, 否则 (7) 式成为 $\alpha + \beta + 2 = \alpha + \beta + 1$, 或者 $1 = 0$, 这是不可能的.

其次, 在 (7) 式中 $d(m_1)$ 及 $d(n_1)$ 也不可能同时大于或等于 2. 否则由 (7) 式可以推出不等式

$$1 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta + 1} = \frac{\alpha + \beta + 2}{2(\alpha + \beta + 1)}$$

这个不等式等价于 $\alpha + \beta = 0$, 这是不可能的, 因为 α 及 β 为正整数.

由前面两种情况可知在 $d(m_1)$ 及 $d(n_1)$ 中, 至少有一个是 1, 另一个大于或等于 2. 当 $d(m_1) = 1$, $d(n_1) \geq 2$ 时, (7) 式成为

$$\frac{1}{d(n_1)} \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 1} + \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta + 1} = 1 \tag{8}$$

此时 (8) 式中 $d(n_1)$ 不可能大于 2. 否则有 $d(n_1) \geq 3$, 从而由 (8) 式可推出

$$3 \leq d(n_1) = \frac{\alpha + 1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha} \leq 2.$$

矛盾. 于是在 (8) 式中只有 $d(n_1) = 2$. 这时 (8) 式成为

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 1} + \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta + 1} = 1$$

解此方程可得 $\alpha = 1$, β 为任意正整数. 此时 $m = p$, $n = p^{\beta} \cdot q$, 其中 p 及 q 为不同的素数. 由方程 (1) 中 m 和 n 的对称性可知 $m = p \cdot q^{\alpha}$, $n = q$ 也是方程 (1) 的一组解.

现在结合前面讨论的两种情况 (A) 及 (B) 我们立刻推出正整数 m 及 n 满足方程 (1) 当且仅当 $(m,n)=(p,p^{\alpha}\cdot q)$ 或者 $(m,n)=(p\cdot q^{\alpha},q)$, 其中 p 及 q 为不同的素数, α 为任意非负整数. 于是完成了定理的证明.

参考文献

[1] Dirichlet G L. sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres[J]. Crelle's Journal, 1938(18): 259-274.

[2] Huxley M N. Exponential sums and lattice points III[J]. Proc London Math Soc, 2003(87): 591-609.

[3] Tong K C. On divisor problems II [J]. Acta Math Sinica, 1956(6): 139-152.

[4] József Sándor and Dragoslav S. Mitrinović, Handbook of Number Theory I [M]. Springer, 2006.

[5] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[6] Amarnath Murthy and Charles Ashbacher. Generalized Partitions and New Ideas on Number Theory and Smarandache Sequences[M]. Hexis, Phoenix, 2005, 88.

[7] 张文鹏, 李海龙. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2008.

On the Smarandache Product Divisor Pairs

LI Yi-jun

(College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)

Abstract: For any positive integer n, let $d(n)$ denotes the Dirichlet divisor function. That is, $d(n)$ denotes the number of all different positive divisors of n. The Smarandache product divisor pairs is a positive integer pairs m and n such that $d(m)+d(n)=d(mn)$. The main purpose of this paper is using the elementary method and the properties of Dirichlet divisor function $d(n)$ to find all positive integer pairs m and n such that $d(m)+d(n)=d(mn)$. That is, we proved that $d(m)+d(n)=d(mn)$ holds if and only if $(m,n)=(p,p^{\alpha}\cdot q)$ or $(m,n)=(p\cdot q^{\alpha},q)$, where p and q are two different primes, α is any non-negative integer.

Keywords: the smarandache product divisor pairs; elementary method; dirichlet divisor function; equation; positive integer solutions