2010年6月
第26卷 第3期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Jun. 2010
Vol.26 No.3

Smarandache 函数的一个下界估计

温田丁

(新疆财经大学应用数学学院, 新疆 乌鲁木齐 830011)

摘要：利用初等及组合方法研究 Smarandache 函数在梅森尼素数上的下界估计问题, 给出了 Smarandache 函数在这一数列上的一个较强的下界估计, 从而改进了相关文献的一个结果.

关键词： Smarandache 函数; 下界估计; 初等方法; 组合方法

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2010)03-0413-04

1 引言及结论

对于任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$. 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么 $S(n)=\max_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们也不难计算出 $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, $S(17)=17$, $S(18)=6$, $S(19)=19$, $S(20)=5$, $\cdots$. 显然函数 $S(n)$ 即不是递增函数, 也不是递减函数. 关于 $S(n)$ 的进一步性质, 许多学者也进行了研究, 获得了不少有趣的结果. 参阅文献 [1-5]. 例如陆亚明 [2] 中研究了方程

$$S\left(m_1+m_2+\cdots+m_k\right)=\sum_{i=1}^{k} S\left(m_i\right)$$

的可解性, 利用解析数论中著名的三素数定理证明了对任意正整数 $k\ge 3$, 该方程有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots, m_k)$.

徐哲峰 [3] 研究了 $S(n)$ 的值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,$\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

乐茂华教授在文献 [4] 中研究了 $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$ 的下界估计问题, 并给出了估计式:

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)\ge 2p+1,$$

收稿日期：2010-03-01.

基金项目：国家自然科学基金 (10671155).

作者简介：温田丁（1960-）, 副教授, 研究方向: 应用数学.

其中 p 为任意奇素数.

苏娟丽 [5] 中改进了文献 [4] 的结论, 给出了更强的下界估计. 即就是证明了对任意素数 $p \geq 7$, 有

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) \geq 6p+1.$$

苏娟丽 [6]] 中还研究了 $S\left(2^p+1\right)$ 的下界估计问题, 证明了对任意素数 $p \geq 7$, 同样可得到估计式

$$S\left(2^p+1\right) \geq 6p+1.$$

以上文献中所涉及的数列 $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ 有着重要的数论背景, 事实上数列 $M_p = 2^p-1$ 称为梅森尼数. 梅森尼曾猜测对所有素数 p, M_p 为素数. 然而这一猜测后来被验证是错误的, 因为 $M_{11} = 2^{11}-1 = 23 \times 89$ 是个合数. 而数列 $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ 与一个古老的数论难题 — 偶完全数密切相关. 有关内容可参阅文献 [8-9].

此外, 文献 [7] 讨论了 Smarandache 函数的另一种下界估计问题, 即就是 Smarandache 函数对费尔马数的下界估计问题, 证明了对任意正整数 $n \geq 3$ 有估计式：

$$S(F_n) = S\left(2^{2^n}+1\right) \geq 8 \cdot 2^n + 1,$$

其中 $F_n = 2^{2^n}+1$ 为著名的费尔马数.

本文作为文献 [5-7] 的一个注释, 利用初等方法及组合技巧改进了上面的两个结论, 获得了更强的下界估计. 具体地说也就是证明了下面的：

定理 对于任意素数 $p \geq 17$, 有估计式

(A) $S\left(2^p-1\right) \geq 10p+1$; (B) $S\left(2^p+1\right) \geq 10p+1$.

显然我们定理中的下界估计优于文献 [4-7] 中的结论, 而且证明过程更具有技巧性!

2 定理的证明

这节利用初等方法及组合技巧直接给出定理的证明. 我们只证明定理中的 (A) 式, 同理可推出定理中的 (B) 式. 由 Smarandache 函数的性质知对于任意素数 $p \mid n$, 有 $S(n) \geq p$ 且 $p \mid S\left(p^\alpha\right)$ 对所有正整数 α 成立. 现在, 对于任意素数 $p \geq 17$, 设 q 为 (2^p-1) 的任一素因子, 显然 $q \geq 5$. 于是由 $S(n)$ 的性质知

$$S\left(2^p-1\right) \geq q. \tag{1}$$

又由于 $q \mid 2^p-1$, 所以 $2^p \equiv 1 \mod q$. 因此 p 是 2 模 q 的指标. 所以由文献 [8] 及 [9] 中指标的性质知 $p \mid \phi(q) = q-1$, 或者 $q = mp+1$. 由于 q 为奇素数, 所以 m 一定为偶数, 因此可设

$$q = 2kp+1,\ k = 1,\ 2, 3,\ \cdots. \tag{2}$$

显然 2^p-1 不可能是一个完全平方数. 否则有 $2^p-1 = u^2$, 或者 $2^p = u^2+1$, 由此推出 $0 \equiv 2^p \equiv u^2+1 \equiv 2 \pmod 4$, 矛盾. 于是 2^p-1 有下列五种可能：

(a) 2^p-1 为素数, 此时注意到 $p\geq 17$, 我们有 $S\left(2^p-1\right)\geq 2^p-1\geq 10p+1$.

(b) 2^p-1 恰好为一个素数 q 的 m 次幂, $m\geq 3$. 由于 2^p-1 不可能为完全平方, 所以 $m=3,\ 5,\ \cdots$. 若 $m\geq 5$, 则此时结合 (1) 及 (2) 式有

$$S\left(2^p-1\right)\geq S(q^m)\geq mq>5(2p+1)>10p+1.$$

若 $m=3$, 则当 $q=2kp+1$ 且 $k\geq 2$ 时仍有

$$S\left(2^p-1\right)\geq S(q^3)\geq 3q>3(4p+1)>10p+1.$$

显然 $2^p-1\neq(2p+1)^3$, 因为当 $p\geq 17$ 时等式 $2^p-1=(2p+1)^3$ 不可能成立, 因为 $2^p-1>(2p+1)^3$, 如果 $p\geq 17$.

(c) 2^p-1 至少含有四个不同的素因子. 此时由 (2) 式可知至少有一个素数满足 $q=2kp+1$ 且 $k\geq 5$, 因为 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数. 此时就有 $S\left(2^p-1\right)\geq q\geq 10p+1$.

(d) 2^p-1 恰好含有三个不同的素因子, 如果其中至少有一个素因子满足 $q=2kp+1$ 且 $k\geq 5$, 那么就有 $S\left(2^p-1\right)\geq q\geq 10p+1$. 如果所有素因子中的 $k\leq 4$, 则注意到 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数,$4p+1$ 和 $8p+1$ 不可能同时为素数, 所以可设

$$2^p-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)^{\beta}\cdot(8p+1)^{\gamma}.$$

此时当 $\beta\geq 2$ 或者 $\gamma\geq 2$ 或者 $\alpha\geq 5$ 时定理显然成立. 所以不失一般性可假定

$$2^p-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)\cdot(8p+1),1\leq\alpha\leq 4.$$

这种情况也是不可能的. 因为如果 $2^p-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)\cdot(8p+1)$, 则由二次剩余的性质可知 2 是素数 $2p+1$ 及 $6p+1$ 的二次剩余. 然而当 $p\equiv 3\mod 4$ 时, 设 $p=4k+3$, 此时

$$\left(\frac{2}{6p+1}\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{6k+5}=-1,$$

这与 2 是素数 $6p+1$ 的二次剩余矛盾. 当 $p\equiv 1\mod 4$ 时, 设 $p=4k+1$, 此时

$$\left(\frac{2}{2p+1}\right)=(-1)^{\frac{(2p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{2k+1}=-1,$$

这与 2 是素数 $2p+1$ 的二次剩余矛盾. 所以当 2^p-1 恰好含有三个不同的素因子时, 一定有 $S\left(2^p-1\right)\geq 10p+1$.

(e) 2^p-1 恰好含有两个不同的素因子. 此时注意到 (2) 式以及 (d) 中的证明过程可知 2^p-1 不可能同时含有素因子 $2p+1$ 及 $6p+1$. 同时 2^p-1 也不可能同时含有素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$, 因为素数 $p>3$ 时, 两个数 $2p+1$ 及 $4p+1$ 中至少有一个被 3 整除, 因此它们不可能同时为素数. 所以由 (2) 式知当 2^p-1 恰好含有两个不同的素因子时可设: $2^p-1=(2p+1)^{\alpha}\cdot(8p+1)^{\beta}$ 或者 $2^p-1=(4p+1)^{\alpha}\cdot(6p+1)^{\beta}$, 因为 $4p+1$ 和 $8p+1$ 不可能同时为素数, 其中至少有一个被 3 整除. 显然当 $\beta\geq 2$ 或者 $\alpha\geq 5$ 时有

$$S\left(2^p-1\right)\geq\beta\cdot(6p+1)\geq 10p+1,\ \text{或者}S\left(2^p-1\right)\geq\alpha\cdot(2p+1)\geq 10p+1.$$

当 $\beta=1$,$1\le\alpha\le4$ 时有 $2^p-1=(2p+1)^\alpha\cdot(8p+1)$ 或者 $2^p-1=(4p+1)^\alpha\cdot(6p+1)$.

若 $2^p-1=(2p+1)^\alpha\cdot(8p+1)$, 显然 $\alpha\ne4$. 否则由 $2^p-1=(2p+1)^4\cdot(8p+1)$ 立刻推出同余式:

$$2^p-1\equiv-1\equiv(2p+1)^4\cdot(8p+1)\equiv1 \mod 8$$

矛盾!

而在 $2^p-1=(4p+1)^3\cdot(6p+1)$ 成立时, 仍然有

$$S\left(2^p-1\right)\ge3\cdot(4p+1)>10p+1.$$

所以不妨设 $1\le\alpha\le3$. 此时当 $p\ge17$ 时, 等式 $2^p-1=(2p+1)^3\cdot(8p+1)$ 或者 $2^p-1=(4p+1)^2\cdot(6p+1)$ 不可能成立, 因为 $2^p-1>(2p+1)^3\cdot(8p+1)$ 及 $2^p-1>(4p+1)^2\cdot(6p+1)$. 综合各种可能不难推出当 2^p-1 恰好含有两个不同素因子时,$S\left(2^p-1\right)\ge10p+1$.

结合以上五种情况我们立刻完成定理中 (A) 式的证明. 类似地, 可以推出定理中的 (B) 式.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Liu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006,2(1):76-79.

[3] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006,(49)5:1009-1012.

[4] Le Mohua. A lower bound for $S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$[J]. Smarandache Notions Journal, 2001,12(1/2/3):217-218.

[5] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2009,22(1):133-134.

[6] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008,24(4):706-708.

[7] Wang Jinrui, On the Smarandache function and the Fermat numbers[J]. Scientia Magna, 2008,4(2):25-28.

[8] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 陕西师范大学出版社, 西安, 2007.

A lower bound estimate for the Smarandache function

WEN Tian-ding

(School of Applied Mathematics, Xinjiang University of Finance and Economics, Urmq 830011, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary and combinational methods to study the lower bound estimate problem of the Smarandache function for Mesenni's numbers, and give a sharper lower bound estimate for it. This improved a result of the related documents

Keywords: Smarandache function, lower bound estimate, elementary method, combinational method

2000MSC: 11B83